



МЕТОДИЧНА
ЛІТЕРАТУРА

Міністерство освіти і науки України

Харківський
національний
університет
імені В. Н. Каразіна

С. С. Апостолов
Т. М. Рохманова

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ
НАБЛИЖЕНИХ
ОБЧИСЛЕНЬ
У ТЕОРЕТИЧНІЙ ФІЗИЦІ

Навчально-методичний посібник

Харків – 2021

Міністерство освіти і науки України

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені В. Н. Каразіна**

С. С. АПОСТОЛОВ

Т. М. РОХМАНОВА

**МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ
НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ
У ТЕОРЕТИЧНІЙ ФІЗИЦІ**

Навчально-методичний посібник

Харків – 2021

Рецензенти:

В. О. Ямпольський – доктор фіз.-мат. наук, головний науковий співробітник Інституту радіофізики та електроніки НАН України, професор кафедри теоретичної фізики імені академіка І. М. Ліфшиця Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, член-кореспондент НАН України;

Г. І. Рашба – кандидат фіз.-мат. наук, завідувач кафедри теоретичної фізики імені академіка І. М. Ліфшиця Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

*Затверджено до друку рішенням Науково-методичної ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
(протокол № 5 від 10 червня 2021 р.)*

Апостолов С. С.

А 76 Математичні методи наближених обчислень у теоретичній фізиці : навч.-метод. посіб. / С. С. Апостолов, Т. М. Рохманова. – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2021. – 84 с.

Навчально-методичний посібник призначений для студентів фізичних спеціальностей, які вивчають математичні методи наближених обчислень, та містить стислий, проте ємний виклад ряду наближених методів, що використовуються у математиці та теоретичній фізиці для отримання асимптотичних виразів, а також ряд завдань, розв'язання яких сприяє розумінню ідей викладених методів та розвитку необхідних практичних навичок їх використання.

УДК 517.15:51-72

© Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, 2021
© Апостолов С. С., Рохманова Т. М., 2021
© Дончик І. М., макет обкладинки, 2021

Зміст

Передмова	5
1. Найпростіші наближені обчислення	7
1.1. Арифметичні наближені розрахунки й оцінка похибки	7
Приклади завдань з розв'язками	7
Завдання для самостійної роботи	10
1.2. Трансцендентні алгебраїчні рівняння	10
Приклади завдань з розв'язками	11
Завдання для самостійної роботи	13
1.3. Наближене визначення неявних функцій. Метод обернення Лагранжа	14
Приклади завдань з розв'язками	15
Завдання для самостійної роботи	16
1.4. Асимптотичне обчислення сум	17
Приклади завдань з розв'язками	19
Завдання для самостійної роботи	21
1.5. Геометричні та графічні наближення	21
Приклади завдань з розв'язками	22
Завдання для самостійної роботи	24
1.6. Приклади індивідуальних завдань до розділу 1	24
2. Наближене розв'язання диференціальних рівнянь	32
2.1. Регулярні диференціальні рівняння	32
Приклади завдань з розв'язками	33
Завдання для самостійної роботи	36
2.2. Сингулярно збурені диференціальні рівняння	36
Приклади завдань з розв'язками	38
Завдання для самостійної роботи	40
2.3. Слабка нелінійність у рівняннях коливань	41
Приклади завдань з розв'язками	42
Завдання для самостійної роботи	44
2.4. Графіки розв'язків диференціальних рівнянь	45

Приклади завдань з розв'язками	45
Завдання для самостійної роботи	47
2.5. Приклади індивідуальних завдань до розділу 2	48
3. Наближене обчислення інтегралів	56
3.1. Загальні методи обчислення інтегралів	56
Приклади завдань з розв'язками	57
Завдання для самостійної роботи	59
3.2. Інтегрування частинами. Інтеграл Фур'є	59
Приклади завдань з розв'язками	60
Завдання для самостійної роботи	62
3.3. Метод стаціонарної фази	63
Приклади завдань з розв'язками	65
Завдання для самостійної роботи	66
3.4. Метод Лапласа. Поняття про метод перевалу	67
Приклади завдань з розв'язками	68
Завдання для самостійної роботи	70
3.5. Приклади індивідуальних завдань до розділу 3	71
Відповіді	79
Розділ 1	79
Розділ 2	80
Розділ 3	81
Бібліографія	83

Передмова

Ви тримаєте у руках навчально-методичний посібник «Математичні методи наближених обчислень у теоретичній фізиці», що містить стислий, проте емний виклад ряду наближених методів, що використовуються у математиці та теоретичній фізиці для отримання асимптотичних виразів. Він призначений для студентів фізичних спеціальностей, які вивчають наближені методи, для викладачів в якості матеріалу для занять зі студентами, а також для всіх початківців, які тільки починають знайомитися з методами отримання асимптотичних формул. На жаль, посібників з наближених методів українською мовою не так багато, і автори хотіли б цим виданням хоча б частково компенсувати цю нестачу.

Вважається, що читач даного посібника знайомий з основними розділами вищої математики, а саме:

1. Границі функції. Похідна. Часткові похідні.
2. Невизначений, визначений і невластний інтеграли. Заміна змінних. Інтегрування частинами.
3. Ряди. Степеневі ряди. Формула Тейлора з залишковим членом. Символи Ландау O та o .
4. Комплексні числа. Інтегрування вздовж комплексної лінії. Основна теорема про лишки.
5. Диференціальні рівняння. Системи лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами.

Посібник складається з трьох розділів. Перший розділ присвячено найпростішим наближеним обчисленням. Другий розділ містить у собі асимптотичні методи, що застосовуються при розв'язанні диференціальних рівнянь. У третьому розділі викладено методи наближеного обчислення інтегралів. Розділи розбито на підрозділи, кожен з яких об'єднує методи однієї тематики і може використовуватися як основа для одного заняття. Підрозділи мають наступну структуру. На початку підрозділу дається короткий теоретичний опис певних методів і способів їх застосування. Потім наводяться приклади

завдань з повними розв'язками, що сприяє розумінню ідеї методу і розвитку необхідних практичних навичок у його використанні. Після цього містяться завдання для самостійної роботи, відповіді до яких зібрано у кінці посібника. Окрім того, деякі задачі містять вказівки, які спрощують розв'язування більш складних завдань. Завдання підвищеної складності мають відмітку (!). Більш того, кожен розділ забезпечено прикладами індивідуальних завдань, що можуть використовуватися викладачами для контролю знань студентів.

Розділ 1

Найпростіші наближені обчислення

1.1. Арифметичні наближені розрахунки й оцінка похибки

Нехай потрібно обчислити значення функції $f(x)$ у деякій точці x із заданою абсолютною похибкою R (або відносною похибкою r). Один з найпоширеніших способів обчислення арифметичних виразів базується на використанні формули Тейлора з залишковим членом:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \Delta x^k + R_n(\xi, \Delta x), \quad R_n(\xi, \Delta x) = \frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \quad (1.1)$$

Тут $\Delta x = x - x_0$, $x_0 \leq \xi \leq x$ (або $x \leq \xi \leq x_0$), $f^{(k)}$ позначає похідну k -го порядку, $k!$ — факторіал числа k .

Якщо значення функції та її похідних неважко розрахувати у точці x_0 , близькій до x , тобто $\Delta x = x - x_0$ мале, то можна використати формулу Тейлора (1.1), взявши достатню кількість n членів розкладання, щоб $|R_n(\xi, \Delta x)| \leq R$ (або $|R_n(\xi, \Delta x)| \leq r|f(x)|$). При цьому оцінка для похибки базується на максимізації $|R_n(\xi, \Delta x)|$ за значенням ξ .

Приклади завдань з розв'язками до підрозділу 1.1

1.1.1. Наближено обчислити $A = \sqrt{2}$ у нульовому, першому і другому наближеннях, представляючи вираз двома різними способами:

$$A^{(1)} = \sqrt{1+1} \quad \text{та} \quad A^{(2)} = \sqrt{4-2}.$$

Порівняти результати. Оцінити абсолютну похибку для кожного наближення.

Розв'язок задачі 1.1.1. В даному прикладі під нульовим, першим і другим наближенням мається на увазі використання формули Тейлора (1.1) з залишковим членом при $n = 0$, $n = 1$ і $n = 2$, відповідно. Згідно з цією формулою для функції $\sqrt{1+x}$ маємо:

$$\sqrt{1+x} = 1 + R_0 = 1 + \frac{x}{2} + R_1 = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + R_2.$$

Тоді для числа $A_1 = \sqrt{1+x}|_{x=1}$ отримаємо наступні наближені значення:

$$A_0^{(1)} = 1, A_1^{(1)} = 1 + \frac{1}{2} = 1.5, A_2^{(1)} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = 1.375$$

та оцінки для залишкового члена ($0 \leq \xi \leq 1$):

$$|R_0^{(1)}| = \frac{1}{2\sqrt{1+\xi}} \leq 0.5, |R_1^{(1)}| = \frac{1}{8(1+\xi)^{3/2}} \leq 0.125, |R_2^{(1)}| \leq 0.0625.$$

Аналогічно для числа $A^{(2)} = \sqrt{4-2} = 2\sqrt{1+x}|_{x=-1/2}$ отримаємо наближені значення:

$$A_0^{(2)} = 2, A_1^{(2)} = 2 - \frac{1}{2} = 1.5, A_2^{(2)} = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{16} = 1.4375$$

та оцінки для залишкового члена ($-1/2 \leq \xi \leq 0$):

$$|R_0^{(2)}| = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, |R_1^{(2)}| = \frac{1}{16(1+\xi)^{3/2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{8}, |R_2^{(2)}| \leq \frac{\sqrt{2}}{16}.$$

Оскільки величину $\sqrt{2}$, яка виникла при оцінці похибки, ми ще не розрахували, то потрібно оцінити зверху значення $\sqrt{2}$, наприклад, наступним чином. Нехай $|R_n^{(2)}| \leq \alpha_n \sqrt{2}$ (зокрема $\alpha_0 = 1/2$, $\alpha_1 = 1/8$, $\alpha_2 = 1/16$), тоді:

$$\sqrt{2} = A_n^{(2)} + R_n^{(2)} \leq A_n^{(2)} + \alpha_n \sqrt{2},$$

звідки $\sqrt{2} \leq A_n^{(2)} / (1 - \alpha_n)$. Остаточоно отримуємо оцінку для $R_n^{(2)}$:

$$|R_0^{(2)}| \leq 2, |R_1^{(2)}| \leq \frac{3}{14} < 0.22, |R_2^{(2)}| \leq \frac{23}{240} < 0.096.$$

Порівнюючи результати для двох виборів розкладання та точне значення $\sqrt{2} \approx 1.41421$, можна зробити наступний висновок. Чим менше Δx , тим швидше будуть сходиться послідовні наближення (значення $A_2^{(1)}$ відрізняється від $\sqrt{2}$ більше ніж $A_2^{(2)}$), хоча може так виявитись, що формальна оцінка похибки R_n може показувати більше відхилення від точного значення в залежності від вибору розкладання ($|R_2^{(2)}| > |R_2^{(1)}|$).

1.1.2. Запропонувати спосіб розрахунку $\sin 3$ з відносною похибкою до 2×10^{-3} .

Розв'язок задачі 1.1.2. За формулою приведення $\sin 3 = \sin(\pi - 3)$. Тепер можна розкласти $\sin(\pi - 3)$ за формулою Тейлора:

$$\sin(\pi - 3) = (\pi - 3) - \frac{(\pi - 3)^3}{3!} + R_4,$$

де R_4 — залишковий член з $0 \leq \xi \leq \pi - 3$. Оцінимо відносну похибку наступним чином:

$$r_4 = \frac{|R_4|}{\sin(\pi - 3)} = \frac{(\pi - 3)^5}{5!} \frac{|\cos \xi|}{\sin(\pi - 3)} < \frac{(\pi - 3)^5}{120 \sin(\pi - 3)} \approx 3.4 \cdot 10^{-6}.$$

Зауваження: Звернемо увагу, що можна використовувати й пряме розкладання $\sin 3 = 3 - 3^3/3! + 3^5/5! + \dots$, але воно може дати достатню точність тільки на члені $3^{17}/17!$.

1.1.3. У скільки разів потужність P_1 вихідного сигналу більше потужності P_0 вхідного, якщо сигнал посилюється на 1 дБ (1 децибел)? Розрахувати з точністю 5%.

Розв'язок задачі 1.1.3. Величина потужності, виражена у децибелах, визначається як $10 \lg(P_1/P_0)$. Тоді сигнал у 1 дБ — це $P_1/P_0 = 10^{1/10}$. Проведемо розрахунки:

$$\begin{aligned} 10^{1/10} &= \exp\left(\frac{1}{10} \ln 10\right) = 1 + \frac{1}{10} \ln 10 + R_1 = \\ &= 1 + \frac{1}{10} \left\{ 2 + \ln \left[1 + \left(\frac{10}{e^2} - 1 \right) \right] \right\} + R_1 = 1 + \frac{1}{10} \left[2 + \left(\frac{10}{e^2} - 1 \right) + R_2 \right] + R_1. \end{aligned}$$

Тут ми використали розкладання функцій $f_1(x) = \exp(x)$ та $f_2(x) = \ln(1+x)$ в ряд Тейлора (1.1) при $x_0 = 0$. Оцінимо похибку $R = R_1 + R_2/10$. Для цього зауважимо, що $R_1 > 0$ і $R_2 < 0$ та, як буде видно з наступних розрахунків, $R_1 > |R_2|/10$. Тому

$$\begin{aligned} 0 < R &= \frac{\ln^2 10}{2! \cdot 10^2} e^{\xi_1} \Big|_{\xi_1 \leq \frac{1}{10} \ln 10} - \left(\frac{10}{e^2} - 1 \right)^2 \frac{1}{2! \cdot 10(1 + \xi_2)^2} \Big|_{\xi_2 \leq \frac{10}{e^2} - 1} < \\ &< \frac{10^{1/10}}{200} \left(\frac{10}{e^2} + 1 \right)^2 - \frac{e^4}{2000} \left(\frac{10}{e^2} - 1 \right)^2 \approx 0.032. \end{aligned}$$

У результаті маємо:

$$\frac{P_1}{P_0} = 10^{1/10} = \frac{11}{10} + \frac{1}{e^2} + R = 1.24 \pm 3\%.$$

Завдання для самостійної роботи до підрозділу 1.1

1.1.4. Наближено розрахувати $B = \sqrt{3}$ у нульовому, першому і другому наближеннях, представляючи вираз у вигляді:

$$B_1 = \sqrt{4-1} \quad \text{та} \quad B_2 = \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{2}{9}}.$$

Порівняти результати. Оцінити абсолютну похибку для кожного наближення.

1.1.5. Запропонувати спосіб розрахунку $\ln 3$ з відносною похибкою до 0.5×10^{-3} .

Вказівка до задачі 1.1.5. Представити $\ln 3$ у вигляді $1 + \ln [1 + (3-e)/e]$ і розкласти $\ln(1+x)$ за формулою Тейлора, див. розв'язок задачі **1.1.3**.

1.1.6. Використовуючи наближені обчислення, доведіть нерівність $\pi^e < e^\pi$.

Вказівка до задачі 1.1.6. Обчисліть асимптотично вираз $\pi - e \ln \pi$ і переконайтеся, що це додатне число. Для обчислення $\ln \pi$ див. вказівку до **1.1.5** та розв'язок задачі **1.1.3**.

1.2. Трансцендентні алгебраїчні рівняння

Нехай $F(x, \varepsilon)$ достатньо диференційована функція¹ обох своїх аргументів. Припустимо, що рівняння

$$F(x, \varepsilon) = 0 \tag{1.2}$$

при $\varepsilon = 0$ має корінь x_0 , тобто $F(x_0, 0) = 0$. Тоді розв'язок x_ε рівняння (1.2) при довільному малому значенні $\varepsilon \rightarrow 0$ може бути знайдений у наступному вигляді:

$$x_\varepsilon = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots + \varepsilon^n x_n + o(\varepsilon^n), \tag{1.3}$$

де $\varepsilon^k x_k$ — називається k -ю поправкою до значення x_0 . Величини x_k можуть бути знайдені шляхом розкладання функції $f(\varepsilon) = F(x_\varepsilon, \varepsilon)$ за формулою Тейлора (1.1) в нульовому, першому, другому і т.д. порядку по $\varepsilon \rightarrow 0$. Зауважимо, що кожен наступний x_{k+1} виражається лише через попередні x_0, x_1, \dots, x_k , тому розрахунки можуть бути проведені послідовно.

Зокрема якщо $\partial_x F(x_0, 0) \neq 0$, то вихідне рівняння має корінь

$$x_\varepsilon = x_0 + \left[-\partial_\varepsilon F(x_0, 0) / \partial_x F(x_0, 0) \right] \varepsilon + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \tag{1.4}$$

¹Тут під *достатньо* диференційованою функцією мається на увазі така функція, яка має стільки похідних, скільки того потребує подальше викладення матеріалу у цьому підрозділі.

Тут під $\partial_x F(x_0, 0)$ та $\partial_\varepsilon F(x_0, 0)$ маються на увазі часткові похідні за першою (x) та другою (ε) змінними функції $F(x, \varepsilon)$ відповідно, розраховані при $x = x_0$ та $\varepsilon = 0$.

Для доведення виразу (1.4) представимо корінь x_ε у вигляді $x_\varepsilon = x_0 + x_1\varepsilon$ та розкладемо $f(\varepsilon) = F(x_0 + \varepsilon x_1, \varepsilon)$ за формулою Тейлора (1.1) в нульовому та першому порядку по $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$0 = F(x_0 + \varepsilon x_1, \varepsilon) = F(x_0, 0) + \left[x_1 \partial_x F(x_0, 0) + \partial_\varepsilon F(x_0, 0) \right] \varepsilon + o(\varepsilon).$$

Оскільки $F(x_0, 0) = 0$, отримуємо, що $x_1 = -\partial_\varepsilon F(x_0, 0) / \partial_x F(x_0, 0) + o(1)$, що і доводить рівність (1.4).

Приклади завдань з розв'язками до підрозділу 1.2

1.2.1. Асимптотично по малому² параметру $\varepsilon \ll 1$ на інтервалі $0 < x < 1$ знайти:

- (а) один корінь рівняння $\sin(x - \varepsilon) = \exp(2\varepsilon x) - 1$;
- (б) два різні корені рівняння $\sin(x^2 + \varepsilon^2) = \exp(2\varepsilon x) - 1$.

Розв'язок задачі 1.2.1а. Представимо дане за умовою рівняння у вигляді

$$F(x, \varepsilon) = \sin(x - \varepsilon) - \exp(2\varepsilon x) + 1 = 0.$$

Неважко пересвідчитися, що $F(0, 0) = 0$. Таким чином, у нульовому наближенні корінь рівняння $x_0 = 0$. Для того, щоб отримати розв'язок у інтервалі $0 < x < 1$, скористаємося рівністю (1.4):

$$x \approx x_0 - \varepsilon \frac{-\cos(x_0 - \varepsilon) - 2x_0 \exp(2\varepsilon x_0)}{\cos(x_0 - \varepsilon) - 2\varepsilon \exp(2\varepsilon x_0)} \Big|_{\varepsilon=0} = \varepsilon.$$

Розв'язок задачі 1.2.1б. Представимо дане за умовою рівняння у вигляді

$$F(x, \varepsilon) = \sin(x^2 + \varepsilon^2) - \exp(2\varepsilon x) + 1 = 0.$$

У нульовому наближенні, при $\varepsilon = 0$, корінь даного рівняння $x_0 = 0$. На жаль, використовувати формулу (1.4) не можна, оскільки $\partial_x F(x_0, 0) = \partial_\varepsilon F(x_0, 0) = 0$. Тому використаємо загальний підхід (1.3). Для знаходження кореня рівняння у першому наближенні треба розкласти $f(\varepsilon) = F(x_\varepsilon, \varepsilon)$ за формулою Тейлора (1.1) в нульовому, першому та другому порядку по $\varepsilon \ll 1$. Нехай корінь $x_\varepsilon = x_0 + \varepsilon x_1 = \varepsilon x_1$, де εx_1 — перша поправка. Розкладемо $f(\varepsilon)$:

$$0 = f(\varepsilon) = F(\varepsilon x_1, \varepsilon) \approx \varepsilon^2(x_1^2 + 1 - 2x_1) = \varepsilon^2(x_1 - 1)^2.$$

²У теоретичній фізиці прийнято використовувати позначення $\varepsilon \ll 1$ (читається « ε набагато менше 1»), що має майже той самий сенс, що й $\varepsilon \rightarrow 0$ у математиці, але мається на увазі, що $\varepsilon > 0$.

Отже, у першому наближенні корінь вихідного рівняння $x_\varepsilon = x_0 + \varepsilon x_1 \approx \varepsilon$. За умовою потрібно знайти два різні корені рівняння, тому необхідно обчислити друге наближення для кореня. Нехай корінь $x_\varepsilon \approx x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 = \varepsilon + \varepsilon^2 x_2$, де $\varepsilon^2 x_2$ — наступна поправка. Розкладемо $f(\varepsilon)$ в ряд Тейлора, зберігаючи у ньому доданки більше і порядку ε^4 :

$$0 = f(\varepsilon) = F(\varepsilon + \varepsilon^2 x_2, \varepsilon) \approx \varepsilon^4(x_2^2 - 1).$$

Отже, $x \approx \varepsilon \pm \varepsilon^2 \sqrt{2}$.

1.2.2. Знайти наближений розв'язок рівняння: $4 \sin x = e^{-x}$ на інтервалі $-1 < x < 1$. Що тут грає роль малого параметра? Скільки необхідно взяти членів розкладання по цьому малому параметру, щоб отримати x з абсолютною похибкою 10^{-2} ?

Розв'язок задачі 1.2.2. Представимо дане рівняння у вигляді

$$F(x, \varepsilon) = \sin x - \varepsilon e^{-x} = 0, \text{ де } \varepsilon = 1/4.$$

Легко бачити, що при $\varepsilon = 0$ корінь рівняння $x_0 = 0$. Далі будемо користуватися загальною схемою (1.3) (також див. розв'язок задачі **1.2.16**). Представимо розв'язок x_ε у наступному вигляді:

$$x_\varepsilon = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots + \varepsilon^n x_n + o(\varepsilon^n).$$

Далі розкладаємо функцію $f(\varepsilon) = F(x_\varepsilon, \varepsilon)$ за формулою Тейлора (1.1) до необхідного порядку по $\varepsilon \ll 1$, знаходимо послідовно кожне наближення x_n . У даному випадку маємо:

$$x_\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon^2 + \frac{5}{3}\varepsilon^3 - \frac{10}{3}\varepsilon^4 + R \Big|_{\varepsilon=1/4} = 0.20 \pm 0.01.$$

Похибка $|R|$ була оцінена нестрогим чином, як наступний член розкладання $|R| \approx 221\varepsilon^5/30$. Цей спосіб строго правильний тільки якщо розкладання знакозмінне.

Зауваження: Запропонований спосіб дозволяє знайти розв'язок рівняння з будь-якою заданою мірою точності. Однак для точності 10^{-2} рівняння можна розв'язати іншим способом. Оскільки розв'язок рівняння близький до нуля, можна розкласти функцію $F(x, 1/4)$ по малості x :

$$0 = \sin x - \frac{1}{4}e^{-x} \approx \frac{-1 + 5x}{4}.$$

Звідси $x = 0.2$. Недолік такого способу в тому, що для великих точностей необхідно розв'язувати степеневе рівняння високого порядку.

1.2.3. Знайти асимптотично, з похибкою менше ніж 5%, всі корені рівняння $x = \operatorname{tg} x$. Чи є у цьому рівнянні малий параметр?

Розв'язок задачі 1.2.3. З перетину графіків функцій $f(x) = x$ та $g(x) = \operatorname{tg} x$ зрозуміло, що рівняння $x = \operatorname{tg} x$ має нескінченне число розв'язків. Перенумеруємо ці розв'язки: $x^{(0)} = 0$ та $x^{(\pm n)}$ — точки перетину, що лежать на інтервалах $[\pm \pi n; \pm \pi(n + 1/2)]$, де $n = 1, 2, 3, \dots$, при цьому $x^{(-n)} = -x^{(n)}$. Знайдемо $x^{(n)}$, розкладаючи по великому параметру $n > 0$. У нульовому наближенні $x^{(n)} \approx x_0^{(n)} = \pi(n + 1/2)$ (точка, де tg прямує до нескінченності). Представимо корінь $x^{(n)}$ у вигляді, схожому на (1.3):

$$x^{(n)} = x_0^{(n)} + \frac{x_1^{(n)}}{n} + \frac{x_2^{(n)}}{n^2} \dots$$

Далі будемо знаходити ці поправки, а саме, візьмемо $x^{(n)} \approx x_0^{(n)} + x_1^{(n)}/n$. Підставимо у рівняння і розкладемо при $n \gg 1$:

$$0 = x^{(n)} - \operatorname{tg} x^{(n)} \approx \pi(n + 1/2) + \operatorname{ctg}[x_1^{(n)}/n] \approx n[\pi + 1/x_1^{(n)}].$$

Таким чином, $x^{(n)} \approx \pi(n + 1/2) - 1/(\pi n)$ у першому наближенні. Незважаючи на те, що при виведенні цієї відповіді використовувалась умова $n \gg 1$, розкладання працює навіть для $x^{(1)}$. Дійсно, помилка в обчисленні $x^{(1)}$ складає близько 2%.

Завдання для самостійної роботи до підрозділу 1.2

1.2.4. Отримайте явний вираз для x_2 у рівнянні (1.3) за умови, що існують другі похідні $F(x, \varepsilon)$ поблизу $(x_0, 0)$ та $\partial_x F(x_0, 0) \neq 0$.

1.2.5. Асимптотично по малому параметру $\varepsilon \ll 1$ знайти:

(а) один корінь рівняння $\operatorname{tg}(\varepsilon x) = \cos x$;

(б) два різні корені рівняння $\ln(x + \varepsilon) = \sin(x - 1)$

на інтервалі $0 < x < 2$.

1.2.6. Знайти наближений розв'язок рівняння: $4 \operatorname{tg} x = e^x$ на інтервалі $0 < x < 1$. Що тут грає роль малого параметра? Скільки необхідно взяти членів розкладання по цьому малому параметру, щоб отримати x з абсолютною похибкою 10^{-2} ?

1.2.7. Знайти, з похибкою менше ніж 10%, всі корені рівняння $x^2 = \operatorname{ctg} 2x$. Що у цьому рівнянні грає роль малого параметра?

Вказівка до задачі 1.2.7. Рівняння має розв'язки: $x^{(0)}$ і $x^{(\pm n)}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. У нульовому наближенні $x^{(0)} \approx \pi/4$ (точка, де ctg дорівнює 0) і $x^{(\pm n)} \approx \pm \pi n/2$ (точки, де ctg прямує до ∞). Знайдіть перше наближення $x^{(\pm n)}$, розкладаючи по великому параметру n , і перше наближення $x^{(0)}$, розкладаючи по малості відхилення від $\pi/4$.

1.3. Наближене визначення неявних функцій. Метод обернення Лагранжа

Неявні функції. Нехай функція $y = y_\varepsilon(x)$ задана неявним чином у вигляді рівняння $F(x, y, \varepsilon) = 0$, де $F(x, y, \varepsilon)$ достатньо диференційована функція своїх аргументів y та ε . Тоді $f_\varepsilon(x)$ може бути знайдена у наступному вигляді, порівняйте з рівнянням (1.3):

$$y_\varepsilon(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots + \varepsilon^n y_n(x) + o(\varepsilon^n), \quad (1.5)$$

де $y = y_0(x)$ — функція, що задана неявно рівнянням $F(x, y_0(x), 0) = 0$, а $\varepsilon^k y_k(x)$ — називається k -ю поправкою до функції $y_0(x)$. Функції $y_k(x)$ можуть бути знайдені шляхом розкладання $F(x, y_\varepsilon(x), \varepsilon)$ за формулою Тейлора (1.1) в нульовому, першому, другому і т.д. порядку по $\varepsilon \rightarrow 0$, так само, як це було показано у попередньому підрозділі. Зокрема якщо $\partial_y F(x, y_0(x), 0) \neq 0$, то

$$y_1(x) = -\partial_\varepsilon F(x, y_0(x), 0) / \partial_y F(x, y_0(x), 0). \quad (1.6)$$

Формула обернення Лагранжа [1]. Нехай функція $f(z)$ аналітична поблизу $z = 0$, причому $f(0) \neq 0$. Тоді існують такі $w_0 > 0$ та $z_0 > 0$, що рівняння

$$w = \frac{z}{f(z)}, \quad \text{при } |z| < z_0, \quad (1.7)$$

має аналітичний по w (при $|w| < w_0$) розв'язок

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \left\{ \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [f(z)]^k \right\} \Big|_{z=0} = w f(0) + w^2 f(0) f'(0) + \dots \quad (1.8)$$

Зауваження: Якщо відоме розкладання $f(z)$ у степеневий ряд при $z \rightarrow 0$,

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots,$$

то, порівнюючи його з формулою Тейлора (1.1) та замінюючи $f^{(k)}(z=0)$ на $k! a_k$, можна записати за методом обернення Лагранжа наступне розкладання:

$$z = a_0 [w + a_1 w^2 + (a_2 a_0 + a_1^2) w^3 + (a_3^2 + 3a_0 a_2 a_1 + a_0^2 a_3) w^4 + \dots].$$

Приклади завдань з розв'язками до підрозділу 1.3

1.3.1. Асимптотично по великому³ параметру $\mu \gg 1$ знайти:

(а) у нульовому, першому і другому наближеннях явний вигляд функції $y = f(x)$, яка задана рівнянням $\operatorname{arctg}(y + \mu) = y - x/\mu$;

(б) дві різні гілки $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ функції, яка задана рівнянням $y = \ln(y + x^2 + \mu^{-2}) + \cos x$ при $x \sim \mu^{-1}$.

Розв'язок задачі 1.3.1а. Введемо нове позначення $\varepsilon = \mu^{-1} \ll 1$. Тоді дане рівняння запишемо у вигляді $F(x, y, \varepsilon) = \operatorname{arctg}(y + \varepsilon^{-1}) - y + x\varepsilon = 0$. Знайдемо функцію у нульовому наближенні ($\varepsilon \rightarrow 0$): $y = f_0(x) = \pi/2$. Потім скористаємося рівністю (1.6):

$$f_\varepsilon(x) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{x - [\varepsilon^2 + (y\varepsilon + 1)^2]^{-1}}{-1 + \varepsilon^2 [\varepsilon^2 + (y\varepsilon + 1)^2]^{-1}} \Big|_{\varepsilon=0, y=\pi/2} \quad \varepsilon = \frac{\pi}{2} + (x - 1)\varepsilon.$$

Запишемо $f_\varepsilon(x) = \pi/2 + (x - 1)\varepsilon + g_2(x)$ для розрахунку другого наближення. Тут $g_2(x)$ — друга поправка, $|g_2(x)| \ll \varepsilon$. Підставимо у такому вигляді у рівняння $F(x, y, \varepsilon) = 0$ і розкладемо, зберігаючи доданки більше і порядку $g_2(x)$ та ε^2 : $F(x, f_\varepsilon(x), \varepsilon) \approx \pi\varepsilon^2/2 - g_2(x)$. Отже, $f_\varepsilon(x) \approx \pi/2 + (x - 1)\varepsilon + \pi\varepsilon^2/2$.

Розв'язок задачі 1.3.1б. Зробимо заміну $\varepsilon = \mu^{-1} \ll 1$, $x = \varepsilon t$. Тоді запишемо рівняння $F(t, y, \varepsilon) = y - \ln[y + \varepsilon^2(t^2 + 1)] - \cos \varepsilon t = 0$. У нульовому наближенні $F(t, y, 0) = y - \ln y - 1 = 0$, отже, $y = f_0(t) = 1$. У першому наближенні функцію шукаємо у вигляді $f_\varepsilon(t) = 1 + f_1(t)$. Підставимо у рівняння, розкладемо по малості $f_1(t)$, зберігаючи доданки більше чи порядку $f_1^2(t)$ та ε^2 , отримаємо:

$$0 = F(t, f_\varepsilon(t), \varepsilon) \approx f_1^2(t)/2 - (1 + t^2/2)\varepsilon^2.$$

Отже, $f_\varepsilon(t) = 1 \pm \varepsilon\sqrt{t^2 + 2}$ або $f_\varepsilon(x) = 1 \pm \sqrt{x^2 + 2\varepsilon^2}$.

1.3.2. Побудувати у головному та наступному наближеннях⁴ обернену функцію до $y(x) = x^{-1}e^{-x}$ при:

(а) $y \gg 1$;

(б) $y \ll 1$.

Розв'язок задачі 1.3.2а. Зробимо заміну змінних $w = y^{-1}$ та $z = x$ у вихідному рівнянні. Тоді вихідне рівняння набуде вигляду $w = z/e^{-z}$, і ми можемо скористатися формулою обернення Лагранжа (1.7) та (1.8) з $f(x) = e^{-x}$.

³У теоретичній фізиці прийнято використовувати позначення $\mu \gg 1$ (читаємо « μ набагато більше 1»), що має той самий сенс, що й $\mu \rightarrow +\infty$ у математиці.

⁴Часто у фізиці використовується термін «головне наближення», який позначає *перший ненульовий* член розкладання по малому параметру. Наприклад, у головному наближенні $\sin x \approx x$, якщо x малий. Термін «наступне наближення» позначає, що розкладання продовжують, поки не виявиться *наступний ненульовий* член. Наприклад, у головному і наступному наближеннях $\sin x \approx x - x^3/6$.

Отримуємо

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \left\{ \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} e^{-kz} \right\} \Big|_{z=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} k^{k-2} w^k}{(k-1)!}$$

або $x = y^{-1} - y^{-2} + 3y^{-3}/2 + \dots$

Розв'язок задачі 1.3.2б. Якщо $y \ll 1$, то $x \gg 1$. Запишемо дане рівняння у вигляді: $x = \ln(1/y) - \ln x$. Оскільки $x \gg \ln x$, то у нульовому наближенні: $x \approx \ln(1/y)$. У першому наближенні $x = \ln(1/y) + x_1$. Розкладаючи дане рівняння, отримуємо: $x_1 \approx -\ln \ln(1/y)$. У результаті маємо: $x = \ln(1/y) - \ln \ln(1/y) + o(\ln \ln(1/y))$.

Завдання для самостійної роботи до підрозділу 1.3

1.3.3. Отримати вираз (1.6) для $y_1(x)$ та вираз для $y_2(x)$.

Вказівка до задачі 1.3.3. Дійте аналогічно доведенню виразу (1.4).

1.3.4. Асимптотично при $\varepsilon \ll 1$ у перших двох наближеннях знайти явний вигляд функції $y = f(x)$ для $y + x = \sin(\varepsilon y - x)$.

1.3.5. Асимптотично при великих значеннях параметра μ у нульовому, першому і другому наближеннях знайти явний вигляд функції $y = f(x)$, яка задана рівнянням $\arctg^2(xy + \mu) = y - x$.

1.3.6. Розв'язати у трьох перших наближеннях задачу **1.3.1б**.

1.3.7. Використовуючи метод обернення Лагранжа, побудувати у трьох порядках обернену функцію до $y = x^2 / \operatorname{tg} x$ поблизу:

(а) $x_1 = 0$;

(б) $x_2 = \pi/2$.

Вказівка до задачі 1.3.7а. Використайте метод Лагранжа (1.7–1.8), зробивши наступну заміну змінних: $w = y$, $z = x$, $f(z) = \operatorname{tg} z/z$. Функція $f(z)$ є аналітичною функцією, якщо доповнити її означення при $z = 0$ граничною умовою $f(z = 0) = 1$.

Вказівка до задачі 1.3.7б. Використайте метод Лагранжа (1.7–1.8), зробивши заміну змінних: $w = y$, $z = x - \pi/2$, $f(z) = -z \operatorname{ctg} z / (z + \pi/2)^2$. Функція $f(z)$ є аналітичною функцією, якщо доповнити її означення при $z = 0$ граничною умовою $f(z = 0) = -4/\pi^2$.

1.4. Асимптотичне обчислення сум

У цьому підрозділі представлені методи асимптотичного обчислення сум, які мають велику кількість доданків, $n \gg 1$, наступного вигляду:

$$\sum_{k=1}^n f(k). \quad (1.9)$$

При цьому спосіб обчислення залежить від того, збігається чи розбігається відповідний ряд чи інтеграл:

$$\int_1^{\infty} f(x) dx. \quad (1.10)$$

Будемо вважати, що інтеграли, які виникають при розрахунках в цьому підрозділі, можуть бути взяті аналітично. Випадки, коли інтеграли потрібно обчислювати наближено, розглядаються у розділі 3.

Перейдемо до випадку, коли інтеграл (1.10) розбіжний, а функція $f(x)$ — достатньо диференційована, знакопостійна та монотонна (такими ж вважаються і ті її похідні, які входять в асимптотичні розрахунки). Тоді суму (1.9) зручно представити у наступному вигляді:

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^{n+1} f(x) dx + R_n, \quad R_n = - \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} [f(x) - f(k)] dx. \quad (1.11)$$

У випадку, коли $|R_n| \ll \left| \int_1^{n+1} f(x) dx \right|$, перший доданок являє собою головне наближення, а R_n — залишковий член, тобто рівність (1.11) становить практичний інтерес. Оскільки підінтегральний вираз у R_n може бути представлений як $|f(x) - f(k)| = |f'(\xi)|(x - k)$, де $k \leq \xi \leq x \leq k + 1$, див. формулу Тейлора (1.1), ми можемо оцінити значення R_n :

$$R_n = O\left(\int_1^{n+1} |f'(x)| dx\right).$$

Якщо сума у R_n така, що відповідний ряд чи інтеграл також розбіжний, то, розкладаючи підінтегральний вираз у R_n до наступного наближення за формулою Тейлора (1.1),

$$[f(x) - f(k)] = (x - k)f'(k) + \frac{(x - k)^2}{2} f''(\xi),$$

ми можемо знову перейти від суми до інтеграла, як зроблено у (1.11),

$$R_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n f'(k) + \tilde{R}_n = \frac{1}{2} \int_1^{n+1} f'(x) dx + \bar{R}_n,$$

та отримати наступне наближення:

$$R_n = [f(1) - f(n+1)]/2 + \bar{R}_n \quad \bar{R}_n = O\left(\int_1^{n+1} |f''(x)| dx\right). \quad (1.12)$$

Зауваження: Наведені асимптотики (1.11) та (1.12) є окремими випадками загальної формули підсумовування Ейлера–Маклорена (див. [1]).

Тепер розглянемо випадок, коли інтеграл (1.10) збіжний. У цьому випадку в головному наближенні його значення дорівнює сумі ряду S , тобто при $n = \infty$,

$$\sum_{k=1}^n f(k) = S + R_n, \quad S = \sum_{k=1}^{\infty} f(k), \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k), \quad (1.13)$$

а залишковий член R_n — це «хвіст» цього ряду, який є малим у порівнянні з одиницею, тобто з сумою S . Подальше асимптотичне обчислення R_n базується на розкладанні функції $f(k)$ за умови, що $k > n \gg 1$. Якщо ж потрібно лише оцінити R_n , то можна замінити суму на інтеграл,

$$R_n = O\left(\int_{n+1}^{\infty} f(x) dx\right).$$

Зауваження: Сума S не залежить від n і є числом, яке повинно бути розраховано точно, а не асимптотично.

Розглянемо також важливий випадок знакозмінних сум, $\sum_m (-1)^m g(m)$, де функція $g(x)$ — достатньо диференційована, невід'ємна та монотонна. Першим етапом обчислення такої суми є зведення до знакопостійної суми:

$$\sum_{m=0}^{2n-1} (-1)^m g(m) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k), \quad f(k) = g(2k) - g(2k+1). \quad (1.14)$$

Оскільки $g(x)$ — монотонна функція, то $f(k)$ — невід'ємна чи недодатна функція, і для неї правильні підходи, раніше наведені у цьому підрозділі. Зокрема якщо інтеграл $\int_0^{\infty} f(x) dx$ розбіжний, то ми можемо використати вираз (1.11) та, розкладаючи $g(2x) - g(2x+1) = -g'(2x) + g''(\xi)/2$ при $2x \leq \xi \leq 2x+1$ за формулою Тейлора (1.1), отримати

$$\sum_{m=0}^{2n-1} (-1)^m g(m) = \frac{g(2n) - g(0)}{2} + R_n, \quad R_n = O\left(\int_0^{2n} |g''(x)| dx\right).$$

Приклади завдань з розв'язками до підрозділу 1.4

1.4.1. Обчислити два перші наближення сум при $n \gg 1$:

$$(a) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}; \quad (б) \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}; \quad (в) \sum_{k=1}^n 2^k \ln k; \quad (г) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln(n+k)}.$$

Розв'язок задачі 1.4.1а. Оскільки відповідний інтеграл є розбіжним, то перейдемо від суми до інтеграла відповідно до рівності (1.11):

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} + R_n = 2\sqrt{n+1} - 2 + R_n, \quad R_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \right),$$

де R_n є частиною збіжного ряду і може бути оцінено згідно з рівністю (1.13):

$$R_n = S + O(n^{-1/2}), \quad \text{де } S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + 2k - 2\sqrt{k^2 + k}}{\sqrt{k}} \approx 0.5396.$$

Виділяючи в явному вигляді головне та наступні наближення, можемо остаточно записати результат:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n+1} + (S - 2) + O(n^{-1/2}).$$

Розв'язок задачі 1.4.1б. Діючи аналогічно **1.4.1а**, перейдемо від суми до інтеграла, а потім оцінемо R_n згідно з рівністю (1.13):

$$\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} = \frac{\ln^2(n+1)}{2} + S + R_n, \quad S = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\ln k}{k} + \frac{\ln^2 k - \ln^2(1+k)}{2} \right) \approx -0.0728.$$

Оскільки з фізичної точки зору $\ln n$ вважається числом порядку 1, то обчислимо ще одне наближення. Для цього в «хвості» ряду в R_n розкладемо функцію відносно великого k та замінимо суму на інтеграл:

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\ln k}{k} + \frac{\ln^2 k - \ln^2(1+k)}{2} \right) = \int_{n+1}^{\infty} \frac{\ln x - 1}{2x^2} dx + \tilde{R}_n = \frac{\ln(n+1)}{2(n+1)} + \tilde{R}_n.$$

Виділяючи в явному вигляді головне та наступні наближення, можемо остаточно записати результат:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} = \frac{\ln^2(n+1)}{2} + S + \frac{\ln(n+1)}{2(n+1)} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

Розв'язок задачі 1.4.1в. Очевидно, що відповідний ряд є розбіжним. Але, на жаль, використовувати (1.11) не є ефективно, тому що R_n виявляється порівняним зі значенням самої суми. Зазначимо, що, оскільки кожен доданок суми більше ніж у два рази перевищує попередній доданок, основне значення ряду набирається за рахунок декількох найбільших доданків з номерами $k = n - l$, де $l \ll n$. Тому ми можемо розкласти кожний доданок у цьому припущенні:

$$\sum_{k=1}^n 2^k \ln k = 2^n \sum_{l=0}^{n-1} 2^{-l} \ln(n-l) = 2^n \sum_{l=0}^{n-1} 2^{-l} \left(\ln n + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{l^k}{kn^k} \right).$$

Зауважимо, що останній вираз є точним, оскільки функція $\ln(1-x)$ є аналітичною для $|x| < 1$. Кожен ряд вигляду $S_k = \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l} l^k$ може бути обчислений аналітично, наприклад, $S_0 = 2$, $S_1 = 2$, $S_2 = 6$, \dots , а «хвіст» такого ряду (від n до ∞) може бути оцінений як $O(2^{-n} n^k)$. Тоді остаточно маємо:

$$\sum_{k=1}^n 2^k \ln k = 2^n \left(\ln n + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{S_k}{kn^k} \right) + O(1) = 2^n \left[2 \ln n - \frac{1}{n} + O(1/n^2) \right].$$

Розв'язок задачі 1.4.1г. Оскільки представлений ряд є знакозмінним, то згрупуємо доданки у пари і розкладемо кожен член нового ряду за великим параметром $(n + 2m)$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln(n+k)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\ln(n+2m)} - \frac{1}{\ln(n+2m+1)} \right] = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2m) \ln^2(n+2m)} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2 + \ln(n+2m)}{2(n+2m)^2 \ln^3(n+2m)} + R. \end{aligned}$$

В отриманих рядах перейдемо від сум до інтегралів, беручи до уваги, що у другому достатньо залишити тільки головне наближення, а у першому ряді потрібно зберегти головне і наступне наближення:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln(n+k)} &= \int_n^{\infty} \frac{dx}{2x \ln^2 x} + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(n+2m) \ln^2(n+2m)} - \int_{n+2m}^{n+2m+2} \frac{dx}{2x \ln^2 x} \right] - \\ &\quad - \int_n^{\infty} \frac{(2 + \ln x) dx}{4x^2 \ln^3 x} + \tilde{R}. \end{aligned}$$

Обчислюючи інтеграли аналітично, розкладаючи кожен член ряду за великим параметром $(n + 2m)$ та залишаючи його головне наближення, остаточно

маємо:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln(n+k)} = \frac{1}{2 \ln n} + \int_n^{\infty} \frac{(2 + \ln x) dx}{2x^2 \ln^3 x} - \frac{1}{4n \ln^2 n} + \bar{R} = \frac{1}{2 \ln n} + \frac{1}{4n \ln^2 n} + \bar{R}.$$

Зауважимо, що залишковий член може бути оцінений як $\bar{R} = O(n^{-2} \ln^{-3} n)$.

Завдання для самостійної роботи до підрозділу 1.4

1.4.2. Обчислити два перші наближення сум при $n \gg 1$:

$$(a) \sum_{k=1}^n \sqrt[3]{k}; \quad (б) \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k^2}; \quad (в) \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \ln k}{k}; \quad (г) \sum_{k=1}^{2n} (-2)^k \ln k.$$

Вказівка до задачі 1.4.2г. Згрупуйте члени ряду в пари з парними і непарними номерами, а потім дійте аналогічно **1.4.1в**.

1.4.3. Показати, що асимптотику 1.12 можна уточнити:

$$\bar{R}_n = \frac{f'(0) - f'(2n)}{4} + \bar{\bar{R}}_n, \quad |\bar{\bar{R}}_n| = O\left(\int_1^{n+1} |f'''(x)| dx\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

1.4.4. (!) Показати, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - e^{-n\varepsilon}) = -\frac{\pi^2}{6\varepsilon} - \frac{1}{2} \ln \frac{\varepsilon}{2\pi} + \frac{\varepsilon}{24} + o(\varepsilon^3), \quad \text{при } 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Вказівка до задачі 1.4.4. Перейдіть від суми до інтеграла:

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{\infty} \ln(1 - e^{-y}) dy + \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{1 - e^{-n\varepsilon}}{1 - e^{-(n+z)\varepsilon}} dz.$$

Перший інтеграл у головному значенні дорівнює $-\pi^2/6\varepsilon$. Поправки знайдіть, розкладаючи підінтегральний вираз. Другий доданок розкладайте по малості $z\varepsilon$. Отримані ряди можуть бути знову розраховані переходом до інтеграла.

1.5. Геометричні та графічні наближення

Наближені обчислення стають у нагоді навіть у тому випадку, коли можливо отримати повністю аналітичну відповідь, але вона є достатньо складною. Наприклад, при побудові графіків складних функцій асимптотики поблизу особливих точок та на нескінченності дозволяють без складних обчислень аналізувати їх поведінку. З іншого боку, у низці проблем теоретичної

фізики асимптотичне розкладання дозволяє проявити фізичну сутність процесу або ж суттєво спростити розрахунки.

Приклади завдань з розв'язками до підрозділу 1.5

1.5.1. Побудувати схематично графіки функцій, використовуючи їх асимптотичну поведінку поблизу особливих точок:

$$(a) y = (e^{x^2} - 1)^{-1}; \quad (б) y = \sqrt{|x| + x^2}.$$

Розв'язок задачі 1.5.1. Розглянемо, як поводить себе функція у різноманітних граничних ситуаціях:

$$(a) y(x \rightarrow +\infty) \approx e^{-x}, y(x \rightarrow -\infty) \approx -1 - e^x, y(x \rightarrow 0) \approx 1/x - 1/2;$$

$$(б) y(x \rightarrow \pm\infty) \approx \pm x + 1/2, y(x \rightarrow 0) \approx \sqrt{|x|}.$$

Зобразимо на координатній площині асимптотики штриховими лініями, а потім суцільною лінією покажемо саму функцію.

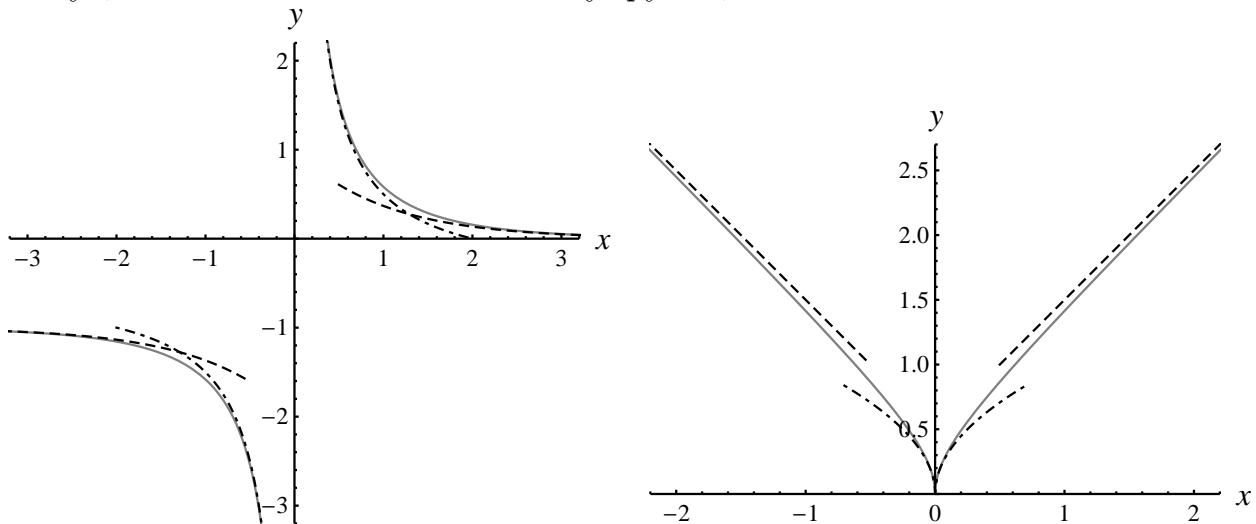


Рис. 1.1: Графіки до задачі 1.5.1

1.5.2. Обчислити у головному і наступному наближеннях різницю довжин ходу променів від двох точкових джерел світла A_1 та A_2 у точку екрана, яку видно із середини відрізка A_1A_2 під кутом α до нормалі до екрана. Джерела розташовані на однаковій відстані S від екрана, відстань між джерелами дорівнює $d \ll S$.

Розв'язок задачі 1.5.2. Точка, що розглядається, розташована на екрані на відстані $x = S \operatorname{tg} \alpha$ від проєкції на нього середини між джерелами. Відстань від джерел до цієї точки визначається з геометричних міркувань: $l_{1,2} = \sqrt{S^2 + (x \pm d/2)^2}$. Вважаючи $d \ll S$, можна розкласти

$$\Delta l = l_1 - l_2 = d \sin \alpha \left(1 - \frac{d^2}{8S^2} \cos^4 \alpha \right) + O\left(\frac{d^5}{S^5}\right).$$

Зауважимо, що головне значення різниці $\Delta l = d \sin \alpha$ відоме ще зі шкільної фізики та описує інтерференційну картину на екрані.

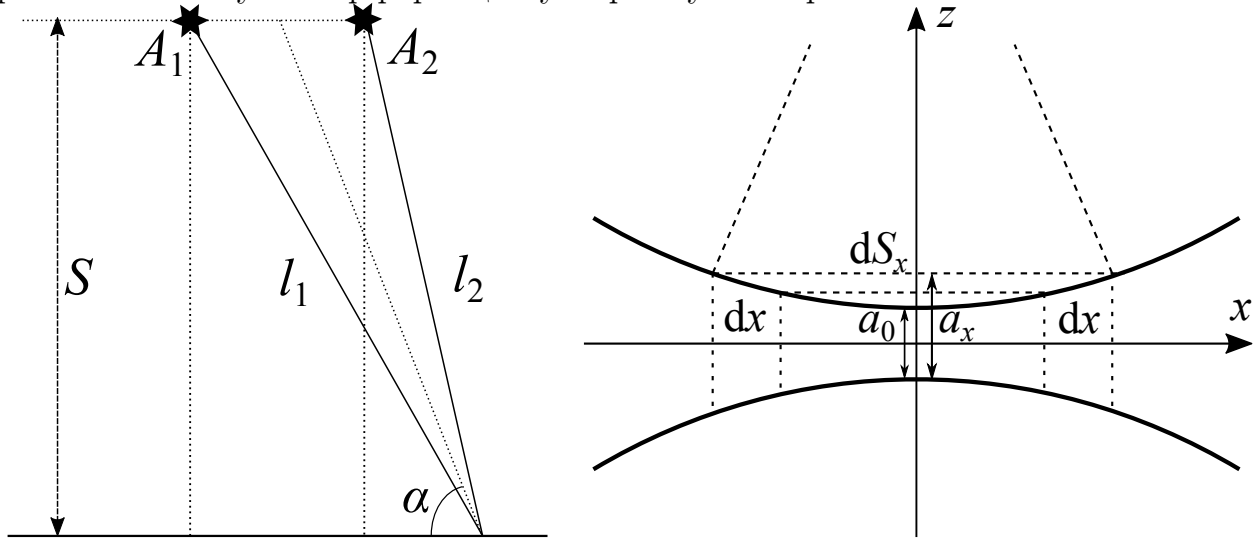


Рис. 1.2: Схеми до розв'язків задач **1.5.2** (ліва панель) та **1.5.3** (права панель)

1.5.3. Сила взаємодії⁵ двох розташованих паралельно пластин площі S дорівнює $F(a) = S\phi_0/a^4$, де $a \ll S^{1/2}$ — відстань між ними, а ϕ_0 не залежить від a та S . Обчислити у головному наближенні силу взаємодії двох куль, розташованих на відстані a_0 одна від одної, за умови, що ця відстань мала порівняно із радіусом куль, $a_0 \ll R$.

Розв'язок задачі 1.5.3. Силу взаємодії куль можна представити у вигляді інтеграла сили взаємодії пластин, вважаючи, що невеликі ділянки куль, які знаходяться навпроти одна одної, притягуються як ділянки пластин. Введемо координати: вісь z направлена через центри куль, площина xOy — площина симетрії системи. Розділимо поверхню куль на кругові смужки площею

$$dS_x = 2\pi x R \left[\arcsin \frac{x + dx}{R} - \arcsin \frac{x}{R} \right] \approx \frac{2\pi x R dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Відстань між цими ділянками дорівнює:

$$a_x = a_0 + 2R - 2\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Таким чином, сила взаємодії між кулями дорівнює:

$$F_{\text{куль}} = \int \frac{F(a_x)}{S} dS \approx \int_0^R F(a_0 + 2R - 2\sqrt{R^2 - x^2}) \frac{2\pi x R dx}{S\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

⁵Прикладом такої сили може слугувати сила Казимира, що виникає між незарядженими ідеальними металевими пластинами під дією квантових флуктуацій у вакуумі. Для такої сили $\phi_0 = \hbar c \pi^2 / 240$.

Врахуємо, що основне значення інтеграл набирає поблизу найбільш близьких точок куль, тобто коли $x \ll R$. Тоді розкладемо підінтегральний вираз:

$$F_{\text{кулі}} \approx \frac{\pi R}{S} \int_0^R F\left(a_0 + \frac{x^2}{R}\right) d\left(a_0 + \frac{x^2}{R}\right) \approx \frac{\pi R}{S} \int_{a_0}^{\infty} F(a) da = \frac{\pi R \phi_0}{3a_0^3}.$$

Завдання для самостійної роботи до підрозділу 1.5

1.5.4. Побудувати схематично графіки функцій, використовуючи асимптотичну поведінку функцій:

$$(a) y = \ln(e^{-x^2} + 1); \quad (б) y = \frac{x^2}{\operatorname{ch} x - 1}; \quad (в) y = \sqrt{|x|^{3/2} + e^{-x^2}}.$$

1.5.5. Спостерігач, розташований на висоті h , бачить на горизонті супутник. Оцінити у головному наближенні відстань від нього до спостерігача, якщо супутник знаходиться на висоті H над поверхнею Землі радіусом R , причому $h \ll H \ll R$. Яку умову необхідно накласти на висоту спостерігача h , щоб відповідь у наступному наближенні не залежала від цієї висоти?

1.5.6. Дві хмари у вигляді куль радіусом R перетинаються таким чином, що відстань між їх центрами дорівнює $a \ll R$. Одна хмара має рівномірну густину позитивного заряду ρ , інша — негативного заряду $-\rho$. Обчислити товщину області простору з ненульовим зарядом та потенціал електромагнітного поля у всьому просторі.

1.5.7. Знайти у головному і наступному наближеннях довжини півосей еліпсоїда $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 1 + \varepsilon xy$ при $\varepsilon \ll 1$.

1.6. Приклади індивідуальних завдань до розділу 1

Кожен з наведених нижче варіантів містить 9 завдань за матеріалами розділу 1. Усі завдання потребують докладного розв'язання, яке містить необхідні розрахунки. Результатом завдань 1, 3 та 7 є числові значення, тому при їх розв'язанні передбачається, що можна використовувати лише «простий» калькулятор, який може виконувати лише операції $+$, $-$, \times , $/$, та крім цілих та десяткових чисел, можна використовувати лише точні значення e і π . Окрім того, в усіх завданнях необхідно *оцінити похибку* обчислень, або у вигляді O від малого/великого параметра у відповідному ступеню, або у вигляді відносної похибки, яка для числових значень не повинна перевищувати 5%.

Варіант 1

1. Обчислити значення виразу $\sin \sqrt{10}$.
2. Розкласти вираз $(1+x)^{1/x}$ при $x \rightarrow +\infty$ у головному та двох наступних наближеннях.

3. Знайти всі корені рівняння $\sin y = \frac{2}{y}$.

4. Асимптотично за $\mu \gg 1$ у нульовому, першому і другому наближеннях визначити явний вигляд ненульової функції $y(x)$, заданої рівнянням

$$1 - y \operatorname{arctg} \mu x = \frac{1}{x} \operatorname{tg} \frac{y}{\mu}, \text{ при } 1 < x < 2.$$

5. Наближено за $\chi \ll 1$ знайти дві різні гілки функції $y(x)$, заданої рівнянням $\exp(\chi xy^2) = (1 - \chi)(2 - 2y + y^2)$, при $x > 1$.

6. Побудувати обернену функцію $x(y)$ до $y(x) = \frac{\sin^2 x}{x}$ поблизу точки $x = 0$ у головному та двох наступних наближеннях.

7. Наближено обчислити значення суми

$$9 - \frac{16}{\sqrt{2}} + \frac{25}{\sqrt{5}} - \dots - \frac{144}{\sqrt{82}} + \frac{169}{\sqrt{101}}.$$

8. Розкласти за малим параметром $0 < a \ll 1$ у головному та наступному наближеннях значення ряду $\sum_{m=1}^{\infty} (\sin m^{-2})^{a+\frac{1}{2}}$.

9. Побудувати схематично у всій області визначення графік функції

$$y(x) = \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{x + (e^{2x} - 1)/2},$$

використовуючи її асимптотичну поведінку.

Варіант 2

1. Обчислити значення виразу $\ln(1 + e^2)$.
2. Розкласти вираз $(1 - y)^{1/y}$ при $y \rightarrow +0$ у головному та двох наступних наближеннях.

3. Знайти всі корені рівняння $\cos z = e^{-z}$.

4. Асимптотично за $\alpha \ll 1$ у нульовому, першому і другому наближеннях визначити явний вигляд ненульової функції $y(x)$, заданої рівнянням

$$\alpha y^2 = \log_x(\alpha y + 1), \text{ при } 2 < x < 5.$$

5. Наближено за $\tau \ll 1$ знайти дві різні гілки функції $y(x)$, заданої рівнянням $1 + y = \exp(y - \tau x^2)$, при $-2 < x < 3$.

6. Побудувати обернену функцію $x(y)$ до $y(x) = \cos x - e^x$ поблизу точки $x = 0$ у головному та двох наступних наближеннях.

7. Наближено обчислити значення суми

$$2 \ln 2 + \sqrt{5} \ln 3 + \sqrt{6} \ln 4 + \sqrt{7} \ln 5 + \dots + 9 \ln 79 + \sqrt{82} \ln 80.$$

8. Розкласти за малим параметром $0 < b - 1 \ll 1$ у головному та наступному наближеннях значення ряду $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m \ln^b m}$.

9. Побудувати схематично у всій області визначення графік функції

$$y(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + x + 4} - x},$$

використовуючи її асимптотичну поведінку.

Варіант 3

1. Обчислити значення виразу $\operatorname{arctg} 81$.

2. Розкласти вираз $\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} t\right)^t$ при $t \rightarrow +\infty$ у головному та двох наступних наближеннях.

3. Знайти всі корені рівняння $\operatorname{tg} x = e^{-x^2}$.

4. Асимптотично за $\beta \ll 1$ у нульовому, першому і другому наближеннях визначити явний вигляд ненульової функції $y(x)$, заданої рівнянням

$$x^{\beta y^2} - 1 = \beta y, \text{ при } 1 < x < 5.$$

5. Наближено за $\zeta \gg 1$ знайти дві різні гілки функції $y(x)$, заданої рівнянням $x \ln(1 + \zeta + (y - 1)^2) = \zeta y^2$, при $1 < x < 2$.

6. Побудувати обернену функцію $x(y)$ до $y(x) = \frac{2x^2}{\ln(1 - x)}$ поблизу точки $x = 0$ у головному та двох наступних наближеннях.

7. Наближено обчислити значення суми

$$\arcsin \frac{1}{2} + 2^3 \arcsin \frac{1}{4} + \dots + 7^3 \arcsin \frac{1}{14}.$$

8. Розкласти за малим параметром $0 < c - 1 \ll 1$ у головному та наступному наближеннях значення ряду $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{1-p}}{(1+p)^c}$.

9. Побудувати схематично у всій області визначення графік функції

$$y(x) = \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - 1}{\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x},$$

використовуючи її асимптотичну поведінку.

Варіант 4

1. Обчислити значення виразу $e^{e^{-1}}$.
2. Розкласти вираз $(\sin x)^x$ при $x \rightarrow +0$ у головному та двох наступних наближеннях.
3. Знайти всі корені рівняння $\cos y = 2e^{-y^2}$.
4. Асимптотично за $\tau \ll 1$ у нульовому, першому і другому наближеннях визначити явний вигляд ненульової функції $y(x)$, заданої рівнянням

$$\sin(\tau y) = \frac{y}{x} - x \sin \frac{y}{x^2}, \text{ при } 0 < x < 3.$$

5. Наближено за $\chi \gg 1$ знайти дві різні гілки функції $y(x)$, заданої рівнянням $(x+1)(y+1)^2 = \chi \ln(1 + \chi^{-1} + y^2)$, при $0 < x < 1$.
6. Побудувати обернену функцію $x(y)$ до $y(x) = \cos x - e^x$ поблизу точки $x = 1$ у головному та двох наступних наближеннях.
7. Наближено обчислити значення суми

$$2^2 \operatorname{arctg} 1 - 3^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 4^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} - \dots + 14^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{13} - 15^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{14}.$$

8. Розкласти за малим параметром $0 < a \ll 1$ у головному та наступному наближеннях значення ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^{1+a^2}}$.
9. Побудувати схематично у всій області визначення графік функції

$$y(x) = \frac{1 - e^{-x^2}}{x + 1 - \sqrt{x^2 + 1}},$$

використовуючи її асимптотичну поведінку.

Варіант 5

1. Обчислити значення виразу $\operatorname{ctg} 3$.
2. Розкласти вираз $(1 - e^{-y})^y$ при $y \rightarrow +\infty$ у головному та двох наступних наближеннях.
3. Знайти всі корені рівняння $\operatorname{ctg} z = e^z$.
4. Асимптотично за $\mu \gg 1$ у нульовому, першому і другому наближеннях визначити явний вигляд ненульової функції $y(x)$, заданої рівнянням

$$x + \operatorname{tg} \frac{y}{\mu x} = y \operatorname{arctg} \mu x, \text{ при } 1 < x < 2.$$

5. Наближено за $\rho \ll 1$ знайти дві різні гілки функції $y(x)$, заданої рівнянням $2x \arcsin[\exp(\rho y) - 1] = y^2 + \rho^2 x^2$, при $0 < x < 1$, $-1 < y < 1$.

6. Побудувати обернену функцію $x(y)$ до $y(x) = \frac{x^2}{\sin x}$ поблизу точки $x = \pi$ у головному та двох наступних наближеннях.

7. Наближено обчислити значення суми

$$4 \sin 1 + \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} + \frac{2^{2/3}}{9} \sin \frac{1}{3} + \dots + \frac{2^{2/17}}{289} \sin \frac{1}{17}.$$

8. Розкласти за малим параметром $0 < b - 1 \ll 1$ у головному та наступному наближеннях значення ряду $\sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p^2} (1 - \cos p^{-1/2})^b$.

9. Побудувати схематично у всій області визначення графік функції

$$y(x) = \frac{1 - e^{-(x-1)^2}}{x - \sqrt{x^2 - 2x + 2}},$$

використовуючи її асимптотичну поведінку.

Варіант 6

1. Обчислити значення виразу $\ln(1 + 3e)$.

2. Розкласти вираз $z^{(z-1)^{-1}}$ при $z \rightarrow 1$ у головному та двох наступних наближеннях.

3. Знайти всі корені рівняння $\operatorname{tg} t = e^{t^2}$.

4. Асимптотично за $\gamma \ll 1$ у нульовому, першому і другому наближеннях визначити явний вигляд ненульової функції $y(x)$, заданої рівнянням

$$\exp(-\gamma xy^2) = 1 + \gamma y, \text{ при } 0 < x < 5.$$

5. Наближено за $\mu \ll 1$ знайти дві різні гілки функції $y(x)$, заданої рівнянням $\frac{1}{y} + \ln(y) = 1 + \mu x$, при $0 < x < 1$.

6. Побудувати обернену функцію $x(y)$ до $y(x) = \frac{x}{1 - \cos^2 x}$ поблизу точки $x = 0$ у головному та двох наступних наближеннях.

7. Наближено обчислити значення суми

$$\frac{2\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{4}}{5} + \frac{4\sqrt{5}}{6} - \dots - \frac{29\sqrt{30}}{31} + \frac{30\sqrt{31}}{32}.$$

8. Розкласти за малим параметром $0 < r - 1 \ll 1$ у головному та наступному наближеннях значення ряду $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{\ln i}{i^r}$.

9. Побудувати схематично у всій області визначення графік функції

$$y(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^3 + x^4 - e^{-x^2}}},$$

використовуючи її асимптотичну поведінку.

Варіант 7

1. Обчислити значення виразу $\arccos \frac{12}{13}$.

2. Розкласти вираз $t^{(t-1)^{-1}}$ при $t \rightarrow +\infty$ у головному та двох наступних наближеннях.

3. Знайти всі корені рівняння $\operatorname{tg} x = e^x$.

4. Асимптотично за $\zeta \gg 1$ у нульовому, першому і другому наближеннях визначити явний вигляд ненульової функції $y(x)$, заданої рівнянням

$$\operatorname{arctg} \zeta x = \frac{1}{y} \operatorname{ctg} \frac{1}{\zeta xy}, \text{ при } 1 < x < 2.$$

5. Наближено за $\beta \ll 1$ знайти дві різні гілки функції $y(x)$, заданої рівнянням $2\beta xy = \ln [1 + \sin(y^2 + \beta^2 x^2)]$, при $0 < x < 1$, $-1 < y < 1$.

6. Побудувати обернену функцію $x(y)$ до $y(x) = x \arctan x$ поблизу точки $x = +\infty$ у головному та двох наступних наближеннях.

7. Наближено обчислити значення суми

$$\sqrt{2} \sin \frac{1}{2} + \sqrt{5} \sin \frac{1}{3} + \dots + \sqrt{290} \sin \frac{1}{17}.$$

8. Розкласти за малим параметром $q \gg 1$ у головному та наступному наближеннях значення ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \cos \left[\frac{\pi k}{2} + \frac{1}{\ln(k+q)} \right]$.

9. Побудувати схематично у всій області визначення графік функції

$$y(x) = \frac{3\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+9}}{x + e^{-x^2} - 1},$$

використовуючи її асимптотичну поведінку.

Варіант 8

1. Обчислити значення виразу $\operatorname{ctg} \frac{3}{2}$.

2. Розкласти вираз $(1 - e^{-x})$ при $x \rightarrow +0$ у головному та двох наступних наближеннях.

3. Знайти всі корені рівняння $\operatorname{ctg} y = e^{y^2}$.

4. Асимптотично за $\varkappa \ll 1$ у нульовому, першому і другому наближеннях визначити явний вигляд ненульової функції $y(x)$, заданої рівнянням

$$xy = \arcsin(xy - \sin(\varkappa x^2 y)), \text{ при } 0 < x < 3.$$

5. Наближено за $\rho \ll 1$ знайти дві різні гілки функції $y(x)$, заданої рівнянням $y = \rho x^2 + \ln(1 + y)$, при $-1 < x < 2$.

6. Побудувати обернену функцію $x(y)$ до $y(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}$ поблизу точки $x = 0$ у головному та двох наступних наближеннях.

7. Наближено обчислити значення суми

$$\arcsin \frac{1}{2} + 2^2 \arcsin \frac{1}{3} + 3^2 \arcsin \frac{1}{4} + \dots + 13^2 \arcsin \frac{1}{14}.$$

8. Розкласти за малим параметром $0 < q - 2 \ll 1$ у головному та наступному наближеннях значення ряду $\sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(1+|l|)^{q-1}}$.

9. Побудувати схематично у всій області визначення графік функції

$$y(x) = \frac{x^3}{\sqrt{9 + x^2 + x^4 - 3e^{-x^2}}},$$

використовуючи її асимптотичну поведінку.

Варіант 9

1. Обчислити значення виразу $\cos 22$.

2. Розкласти вираз $(\operatorname{tg} x)^x$ при $x \rightarrow 0$ у головному та двох наступних наближеннях.

3. Знайти всі корені рівняння $\operatorname{ctg} z = e^{-z^2}$.

4. Асимптотично за $\tau \ll 1$ у нульовому, першому і другому наближеннях визначити явний вигляд ненульової функції $y(x)$, заданої рівнянням

$$\sin y + \sin(\tau xy) = y, \text{ при } 0 < x < 3.$$

5. Наближено за $\theta \gg 1$ знайти дві різні гілки функції $y(x)$, заданої рівнянням $\theta \ln \frac{e^y}{1+y} = x$, при $0 < x < 2$.

6. Побудувати обернену функцію $x(y)$ до $y(x) = \frac{1 - \cos 2x}{x}$ поблизу точки $x = 0$ у головному та двох наступних наближеннях.

7. Наближено обчислити значення суми

$$\frac{2\sqrt{2}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{6} + \frac{4\sqrt{4}}{7} - \dots - \frac{29\sqrt{29}}{32} + \frac{30\sqrt{30}}{33}.$$

8. Розкласти за малим параметром $0 < q \ll 1$ у головному та наступному наближеннях значення ряду $\sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + |r|)}{(|r| + 2)^{q+1}}$.

9. Побудувати схематично у всій області визначення графік функції

$$y(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + x/2 + 1} - x},$$

використовуючи її асимптотичну поведінку.

Варіант 10

1. Обчислити значення виразу $\operatorname{tg} 3$.

2. Розкласти вираз $(1 + y^{-1})^y$ при $y \rightarrow +\infty$ у головному та двох наступних наближеннях.

3. Знайти всі корені рівняння $\cos t = t^{-2}$.

4. Асимптотично за $\kappa \ll 1$ у нульовому, першому і другому наближеннях визначити явний вигляд ненульової функції $y(x)$, заданої рівнянням

$$\frac{\kappa y}{\sqrt{x}} = \exp(-\kappa y^2) - 1, \text{ при } 1 < x < 2.$$

5. Наближено за $\omega \gg 1$ знайти дві різні гілки функції $y(x)$, заданої рівнянням $(x + 1)(y + 1)^2 = \omega \ln(1 + \omega^{-1} + y^2)$, при $0 < x < 1$.

6. Побудувати обернену функцію $x(y)$ до $y(x) = \frac{(x - \pi)^2}{\sin x}$ поблизу точки $x = \pi$ у головному та двох наступних наближеннях.

7. Наближено обчислити значення суми

$$\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{2}{3} \ln 3 + \dots + \frac{20}{21} \ln 21.$$

8. Розкласти за малим параметром $0 < -1 - p \ll 1$ у головному та наступному наближеннях значення ряду $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{\ln^p j}{j}$.

9. Побудувати схематично у всій області визначення графік функції

$$y(x) = \frac{1 - e^{-x^2}}{x + 2 - \sqrt{x^2 + 4}},$$

використовуючи її асимптотичну поведінку.

Розділ 2

Наближене розв'язання диференціальних рівнянь

2.1. Регулярні диференціальні рівняння

Нехай $f(t, x, \varepsilon)$ та $X(\varepsilon)$ є достатньо диференційовними функціями своїх аргументів, $x_0(t)$ — розв'язок рівняння $\dot{x}_0(t) = f(t, x_0(t), 0)$ з початковою умовою $x(t_0, 0) = X(0)$. Тоді розв'язок рівняння

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \varepsilon), \quad x(t_0, \varepsilon) = X(\varepsilon) \quad (2.1)$$

може бути представлений у вигляді

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots + \varepsilon^n x_n(t) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.2)$$

де функції $x_k(t)$, $k = 1, \dots, n$ задовольняють рівнянням

$$\dot{x}_k(t) = f'_x(t, x_0(t), 0)x_k(t) + f_k(t) \quad (2.3)$$

з початковою умовою $x_k(t_0) = (k!)^{-1} \partial_\varepsilon^k X(0)$. Тут f'_x — похідна f по x , $f_k(t)$ — функції, що виражаються певним чином через функції $x_j(t)$, $j < k$.

В якості прикладу знайдемо явний вираз для $f_1(t)$. Для цього підставимо розв'язок (2.2) у диференціальне рівняння (2.1) та розкладемо за формулою Тейлора (1.1) до членів порядку ε :

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) + \varepsilon \dot{x}_1(t) + O(\varepsilon^2) &= f(t, x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + O(\varepsilon^2), \varepsilon) = \\ &= f(t, x_0(t), 0) + \varepsilon [f'_x(t, x_0(t), 0)x_1(t) + f'_\varepsilon(t, x_0(t), 0)] + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Прирівнюючи члени при однакових степенях ε та порівнюючи з рівнянням (2.3), приходимо до висновку, що $f_1(t) = f'_\varepsilon(t, x_0(t), 0)$.

Зауважимо також, що роль малого (чи великого) параметра у диференціальному рівнянні може відігравати сама змінна. В цьому випадку диференціальне рівняння може бути спрощене шляхом нехтування доданками, що

виявляються малими відносно інших, можливо лише гіпотетично. У цьому підході важливо перевірити, чи отриманий розв'язок відповідає гіпотезі, яка була застосована для спрощення вихідного рівняння.

Приклади завдань з розв'язками до підрозділу 2.1

2.1.1. Знайти точний і асимптотичний (у головному і двох наступних наближеннях) по $\varepsilon \ll 1$ розв'язок диференціального рівняння $\dot{x}(t) = x(t) \cos(\varepsilon t) + \sin(2\varepsilon t)$ з початковою умовою $x(0) = e^\varepsilon$. Порівняти ці розв'язки, розкладаючи точний розв'язок по $\varepsilon \ll 1$.

Розв'язок задачі 2.1.1. Точний розв'язок рівняння може бути знайдений, наприклад, методом варіації сталої. Для цього спочатку знайдемо розв'язок однорідного рівняння, відкидаючи $\sin(2\varepsilon t)$: $x(t) = C(t) \exp[\varepsilon^{-1} \sin(\varepsilon t)]$. Далі складемо для $C(t)$ рівняння: $\dot{C}(t) = \sin(2\varepsilon t) \exp[-\varepsilon^{-1} \sin(\varepsilon t)]$. Інтегруючи це рівняння та знаходячи константу інтегрування з початкової умови, отримуємо точний розв'язок, який розкладаємо у головному і двох наступних наближеннях, щоб у подальшому порівняти з асимптотичним розв'язком:

$$x(t) = (e^\varepsilon + 2\varepsilon)e^{\frac{\sin \varepsilon t}{\varepsilon}} - 2(\varepsilon + \sin \varepsilon t) \approx e^t + (3e^t - 2 - 2t)\varepsilon + \frac{3 - t^3}{6}e^t\varepsilon^2.$$

Знайдемо тепер асимптотичний розв'язок у нульовому наближенні. Для цього покладемо $\varepsilon = 0$ і отримаємо рівняння $\dot{x}_0(t) = x_0(t)$ з початковою умовою $x_0(0) = 1$. Його розв'язком є $x_0(t) = e^t$. Для визначення наступного наближення представимо $x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t)$, де $x(t)$ — поправка, як вказано у (2.2). Підставляємо у вихідне рівняння, розкладаємо до членів порядку ε та отримуємо рівняння для $x_1(t)$, яке відповідає (2.3):

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + 2t, \quad x_1(0) = 1.$$

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо $x_1(t) = (3e^t - 2 - 2t)$.

Далі знаходимо наступне наближення: $x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t)$. Зберігаючи доданки порядку ε^2 , отримуємо рівняння для $x_2(t)$:

$$\dot{x}_2(t) = x_2(t) - t^2 e^t / 2, \quad x_2(0) = 1/2,$$

розв'язком якого є $x_2(t) = (3 - t^3)e^t / 6$. Отримані наближення узгоджуються з розкладанням точного розв'язку.

2.1.2. У головному і наступному наближеннях по $\mu \gg 1$ асимптотично розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2 \operatorname{arctg} [\mu x(t)] - y(t), & x(1) = \pi, \\ \mu \dot{y}(t) = \exp [x(t) + y(t)], & y(1) = 0. \end{cases}$$

Розв'язок задачі 2.1.2. Оскільки $\mu \gg 1$, то зручно ввести малий параметр $\varepsilon = \mu^{-1} \ll 1$. У головному наближенні, при $\varepsilon \rightarrow 0$, система має вигляд:

$$\dot{x}_0(t) = \pi, \quad x_0(1) = \pi, \quad \dot{y}_0(t) = 0, \quad y_0(1) = 0.$$

Отже, її розв'язком є: $x_0(t) = \pi t$ та $y_0(t) = 0$.

У наступному наближенні представляємо невідомі функції у вигляді (2.3): $x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t)$ та $y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t)$ і розкладаємо дану систему за формулою Тейлора (1.1):

$$\dot{x}_1(t) = -2/(\pi t) - y_1(t), \quad \dot{y}_1(t) = e^{\pi t}, \quad x_1(1) = y_1(1) = 0.$$

Розв'язуючи цю систему, остаточно отримуємо:

$$x(t) \approx \pi t - (2\pi \ln t + e^{\pi t})/(\mu\pi^2), \quad y(t) \approx e^{\pi t}/(\mu\pi).$$

2.1.3. Радіальна частина хвильової функції $\psi(r)$ квантової частинки, що рухається з заданим моментом імпульсу у центральному кулонівському полі $U(r, \theta, \varphi) = U(r) = -a/r$, описується рівнянням

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) + \left[E - U(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \psi(r) = 0,$$

де E — енергія частинки, l — ціле число, що характеризує значення моменту імпульсу. Дослідити асимптотичну поведінку функції $\psi(r)$ для малих і великих значень змінної r , вважаючи, що $E < 0$ та функція $\psi(r)$ — обмежена.

Розв'язок задачі 2.1.3. Розглянемо випадок $r \rightarrow 0$. За такої умови можна відкинути E і $U(r)$ у порівнянні з $l(l+1)/r^2$ у квадратних дужках. В результаті отримуємо рівняння:

$$r^2 \psi''(r) + 2r\psi'(r) - l(l+1)\psi(r) = 0.$$

Розв'язок цього рівняння (рівняння Коші–Ейлера) має вигляд $\psi(r) = r^k$. Підставляючи його у рівняння, приходимо до квадратного рівняння $k^2 - k + 2k - l(l+1) = 0$. Його розв'язки $k_1 = l$ та $k_2 = -(l+1)$. Другий розв'язок не має фізичного змісту, оскільки необмежено зростає при $r \rightarrow 0$. У результаті маємо $\psi(r) = C_1 r^l$.

Для другого граничного випадку $r \rightarrow \infty$, ми можемо відкинути $U(r)$ та $l(l+1)/r^2$ у квадратних дужках у порівнянні з E , а також $\psi'(r)$, яке виникає при розкритті похідної у першому члені рівняння (гіпотеза!). В результаті маємо: $\psi'' + E\psi = 0$. Розв'язком цього рівняння (фізично реалістичним, тобто обмеженим при $r \rightarrow \infty$) є $\psi(r) = C_2 e^{-r\sqrt{|E|}}$.

Зауваження: Цікаво, що асимптотична поведінка $\psi(r)$, знайдена вище, не залежить від величини потенціалу $U(r)$. Насправді це не зовсім так. Якщо представити $\psi(r)$ у наступному вигляді, який поєднує дві знайдені асимптотики, $\psi(r) = Cf(r)r^l e^{-r\sqrt{|E|}}$, то можна показати, що функція $f(r)$ повинна вести себе як поліном, коефіцієнти якого залежать від $U(r)$. Але цей розрахунок виходить за межі асимптотичних методів, які ми розглядаємо в цьому підрозділі.

2.1.4. Побудувати у головному і наступному наближеннях асимптотичний розв'язок рівняння $y'(x) + y^3(x) = x^3$ при $x \gg 1$.

Розв'язок задачі 2.1.4. Права частина рівняння $x^3 \gg 1$. Отже, ліва частина рівняння теж повинна бути великою. При цьому можна шукати розв'язок, припускаючи, що будь-яким з трьох членів даного рівняння можна знехтувати. Складемо відповідно три гіпотези:

1. Нехай $|y^3(x)| \ll |y'(x)|$, тоді рівняння спрощується до: $y'(x) = x^3$. Його розв'язком є $y(x) = x^4/4 + C$. При цьому ми бачимо, що $|y^3(x)| \gg |y'(x)|$, значить, наше припущення хибне.

2. Знехтуємо тепер членом x^3 , тобто $x^3 \ll |y'(x)|$. Тоді отримуємо рівняння $y'(x) = -y^3(x)$, розв'язком якого є $y(x) = \pm(2x - C)^{-1/2}$. Але при цьому знову порушується наше припущення, оскільки $|y'(x)| \ll x^3$.

3. Розглянемо третю можливість, $|y'(x)| \ll |y^3(x)|$. У цьому випадку рівняння набуває вигляду $y^3(x) = x^3$, тобто перестає бути навіть диференціальним. Його розв'язком є $y(x) = x$, і виявляється, що наше припущення правильне, оскільки $|y'(x)| = 1 \ll |x^3| = |y^3(x)|$, отже, у головному наближенні це і є розв'язком даного диференціального рівняння: $y_0(x) = x$.

Знайдемо наступне наближення. Для цього представимо $y(x) = y_0(x) + y_1(x) = x + y_1(x)$, де наступне наближення повинно бути меншим, ніж головне, $|y_1(x)| \ll |x|$. Підставляючи його в такому вигляді у рівняння й зберігаючи тільки доданки більше і порядку $y_1(x)$ та 1, отримуємо: $y_1' + 3x^2 y_1 = -1$. Це лінійне рівняння може бути розв'язано у квадратурах точно, але ми знайдемо його асимптотичний розв'язок тим самим способом, використаним вище для головного наближення. Наведемо тут тільки правильну гіпотезу, інші дві призведуть до протиріч. Нехай $|y_1'(x)| \ll 1$, тоді рівняння спрощується, і ми отримуємо: $y_1 = -1/(3x^2)$.

Остаточно отримуємо: $y(x) = x - 1/(3x^2)$.

Зауваження: Показовим є те, що розв'язок диференціального рівняння був знайдений без розв'язання безпосередньо диференціального рівняння, а зведений до розв'язання алгебраїчних рівнянь. Тим не менш, похідна «спра-

цювала» при виведенні рівняння для $y_1(x)$: член -1 , який увійшов до результату, з'явився саме з $y'(x)$, оскільки $y'_0(x) = 1$.

Завдання для самостійної роботи до підрозділу 2.1

2.1.5. Вивести вираз для $f_2(t)$ у рівнянні (2.3) (при $k = 2$).

2.1.6. Використовуючи результати теоретичного вступу до 2.1, записати рівняння для нульового та першого наближень при $\varepsilon \ll 1$ розв'язку рівняння $y''(x) + a(x, \varepsilon)y'(x) + b(x, \varepsilon)y(x) = c(x, \varepsilon)$, з початковими умовами $y(x_0) = u(\varepsilon)$, $y'(x_0) = v(\varepsilon)$, де $a(x, \varepsilon)$, $b(x, \varepsilon)$, $c(x, \varepsilon)$, $u(\varepsilon)$ та $v(\varepsilon)$ — достатньо диференційовані функції.

2.1.7. Знайти точні розв'язки задач

(а) $\dot{x}(t) = e^{x(t)+t\varepsilon}$, $x(0) = 0$;

(б) $x^2y''(x) + 2\varepsilon xy'(x) + \varepsilon^2 y(x) = x$, $y(1) = y'(1) = 0$,

а також їх асимптотичні розв'язки при $\varepsilon \ll 1$ у головному і наступному наближеннях. Порівняти ці розв'язки, розкладаючи точний розв'язок за малим параметром.

2.1.8. Визначити асимптотичний розв'язок задачі

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)/(\mu + y(t)), & x(0) = 1, \\ \ddot{y}(t) = \sin [x(t)y(t)], & y(0) = \pi, \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

у головному і наступному наближеннях при $\mu \gg 1$.

2.1.9. Описати у головному і наступному наближеннях асимптотичну поведінку розв'язків задач при $x \ll 1$ та $x \gg 1$

(а) $y'(x) + y^2(x) = \exp(x^2)$, $y(0) = 0$; (б) $y'(x) + y^3(x) = \frac{1}{x}$.

Вказівка до задачі 2.1.9а. Початкова умова може бути використана лише у граничному випадку $x \ll 1$. В цьому ж випадку можна розкласти функцію $\exp(x^2)$ за формулою Тейлора (1.1).

2.2. Сингулярно збурені диференціальні рівняння

Нехай задана система ДР з початковими умовами на відрізку $0 \leq t \leq T \leq \infty$ у вигляді

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, y), & x(0, \varepsilon) = x^0, \\ \varepsilon \dot{y} = F(t, x, y), & y(0, \varepsilon) = y^0. \end{cases} \quad (2.4a)$$

Асимптотичний розв'язок цієї системи за малим параметром ε може бути знайдений наступним чином¹. Невідомі функції можуть бути знайдені у вигляді суми двох розв'язків, кожен з яких розкладається за малим параметром ε :

$$\begin{bmatrix} x(t, \varepsilon) \\ y(t, \varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}(t, \varepsilon) + \xi(\tau, \varepsilon) \\ \bar{y}(t, \varepsilon) + \eta(\tau, \varepsilon) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \begin{bmatrix} \bar{x}_k(t) + \xi_k(\tau) \\ \bar{y}_k(t) + \eta_k(\tau) \end{bmatrix} + R_n(t, \varepsilon). \quad (2.4б)$$

Функції \bar{x} та \bar{y} являють собою так звані регулярні, а ξ та η — пограничні розв'язки, які змінюються на масштабі $\tau = t/\varepsilon$ та прямує до 0 при $\tau \rightarrow \infty$.

У нульовому наближенні розв'язок системи будемо шукати у вигляді (2.4б):

$$x(t, \varepsilon) = \bar{x}_0(t) + \xi_0(\tau), \quad y(t, \varepsilon) = \bar{y}_0(t) + \eta_0(\tau). \quad (2.5а)$$

Тоді ми можемо знайти регулярний розв'язок, розглядаючи систему (2.4а) подальше від границі ($t \sim 1$ та $\tau \sim \varepsilon^{-1} \gg 1$) та прирівнюючи ε до 0. При цьому можна вважати, що пограничний розв'язок дорівнює нулю у головному наближенні:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_0(t) = f(t, \bar{x}_0(t), \bar{y}_0(t)), & \bar{x}_0(0) = x^0, \\ F(t, \bar{x}_0(t), \bar{y}_0(t)) = 0. \end{cases} \quad (2.5б)$$

В отриманій системі залишилась лише одна з початкових умов, оскільки друге рівняння перестало бути диференціальним. Система (2.5б) розв'язується наступним чином. З другого рівняння, яке є алгебраїчним, потрібно виразити $\bar{y}_0(t)$ через t та $\bar{x}_0(t)$ та підставити у перше рівняння. В результаті отримуємо диференціальне рівняння з початковою умовою лише для $\bar{x}_0(t)$, яке треба розв'язувати точно.

Для визначення пограничного розв'язку у головному наближенні розглядаємо систему (2.4а) поблизу границі ($t \sim \varepsilon \ll 1$ та $\tau \sim 1$). У цьому випадку ми можемо покласти $t = 0$ у всіх регулярних функціях, але зберегти залежність від τ у пограничних розв'язках ξ_0 та η_0 :

$$\begin{cases} \xi_0(\tau) = 0, \\ \dot{\eta}_0(\tau) = F(0, x^0, \bar{y}_0(0) + \eta_0(\tau)), & \eta_0(0) = y^0 - \bar{y}_0(0). \end{cases} \quad (2.5в)$$

Тут, і далі у цій темі, крапка над функцією, яка залежить від τ , позначає диференціювання не по t , а по τ . Треба зауважити, що перше рівняння виникло завдяки тому, що доданок $\varepsilon^{-1}\dot{\xi}_0(\tau)$, який виникає з $\dot{x}_0(t) = \dot{\bar{x}}_0(t) + \varepsilon^{-1}\dot{\xi}_0(\tau)$, виявляється єдиним головним наближенням у першому рівнянні, що призводить до рівняння $\dot{\xi}_0(\tau) = 0$. Оскільки $\xi_0(\tau)$ повинно прямувати до 0 при $\tau \rightarrow \infty$, то й отримуємо саме перше рівняння з системи (2.5в).

¹Викладений алгоритм достовірно призводить до правильної відповіді при виконанні певних умов, сформульованих А. М. Тихоновим та А. Б. Васильєвою (див. монографію [2]). У рамках цих умов при $\varepsilon \rightarrow 0$ правильно, що $\|Rz_n(t, \varepsilon)\| = \bar{O}(\varepsilon^{n+1})$ і побудований розв'язок єдиний.

Для обчислення наступного наближення потрібно представити розв'язок у вигляді (2.4б):

$$\begin{bmatrix} x(t, \varepsilon) \\ y(t, \varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_0(t) + \xi_0(\tau) \\ \bar{y}_0(t) + \eta_0(\tau) \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) + \xi_1(\tau) \\ \bar{y}_1(t) + \eta_1(\tau) \end{bmatrix}. \quad (2.6a)$$

Розглядаючи вихідну систему (2.4a) подалі від границі ($t \sim 1$ та $\tau \sim \varepsilon^{-1} \gg 1$) та поблизу границі ($t \sim \varepsilon \ll 1$ та $\tau \sim 1$) і розкладаючи в кожному випадку в головному і наступному наближенні, отримуємо наступну систему рівнянь з початковими умовами:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1(t) = \bar{f}_x(t)\bar{x}_1(t) + \bar{f}_y(t)\bar{y}_1(t), & \bar{x}_1(0) = -\xi_1(0), \\ \bar{F}_x(t)\bar{x}_1(t) + \bar{F}_y(t)\bar{y}_1(t) = \dot{\bar{y}}_0(t), \\ \xi_1(\tau) = -\int_{\tau}^{\infty} \Delta f(\tau') d\tau', \\ \dot{\eta}_1(\tau) = F_x(\tau)\xi_1(\tau) + F_y(\tau)\eta_1(\tau) + G(\tau), & \eta_1(0) = -\bar{y}_1(0), \end{cases} \quad (2.6б)$$

де $\bar{g}(t)$ та $g(\tau)$ позначають $g(t, \bar{x}_0(t), \bar{y}_0(t))$ та $g(0, x^0, \bar{y}_0(0) + \eta_0(\tau))$, відповідно, $\Delta g(\tau) = g(\tau) - \bar{g}(0)$, g позначає f, f_x, f_y, F_x, F_y або F_t , індекс x, y або t позначає часткову похідну по відповідному аргументу. Функцію $G(\tau)$ визначаємо як

$$G(\tau) = \Delta F_t(\tau)\tau + \Delta F_x(\tau)[\dot{\bar{x}}_0(0)\tau + \bar{x}_1(0)] + \Delta F_y(\tau)[\dot{\bar{y}}_0(0)\tau + \bar{y}_1(0)]. \quad (2.6в)$$

Зауваження: При виведенні останнього рівняння системи (2.6б) змінна t у регулярних функціях не просто прирівнювалась до 0, як це було зроблено при виведенні системи (2.5в), а вважалась величиною порядку ε , а саме, $t = \varepsilon\tau$, де $\tau \sim 1$. Це призвело до виникнення доданків з τ у визначенні (2.6в) для функції $G(\tau)$.

Приклади завдань з розв'язками до підрозділу 2.2

2.2.1. Розв'язати точно і асимптотично у нульовому наближенні при $\varepsilon \ll 1$ рівняння $\varepsilon \dot{x}(t) + x(t) = e^{-t}$, $x(0) = 0$. Порівняти результати.

Розв'язок задачі 2.2.1. Точний розв'язок рівняння може бути знайдений методом варіації сталої: $x(t) = (e^{-t} - e^{-t/\varepsilon})/(1 - \varepsilon)$.

Розв'яжемо дане рівняння асимптотично у головному наближенні, представляючи розв'язок у вигляді $x(t) = \bar{x}_0(t) + \xi_0(\tau)$, де $\bar{x}(t)$ — регулярний, а $\xi(\tau)$ — пограничний розв'язок. Розглядаючи дане рівняння подалі від границі ($t \sim 1$ та $\tau \gg 1$), можемо покласти $\xi_0(\tau) \rightarrow 0$ та $\varepsilon \rightarrow 0$. Тоді знаходимо, що $\bar{x}_0(t) = e^{-t}$. Пограничний розв'язок знайдемо, розглядаючи рівняння поблизу границі ($t \ll 1$ та $\tau \sim 1$). Тоді у регулярні функції можна підставити $t = 0$, а в $\xi_0(\tau)$ залишити τ : $\dot{\xi}_0(\tau) + \xi_0(\tau) = 0$. При цьому граничною умовою

є $\xi_0(0) = x(0) - \bar{x}_0(0) = -1$. У результаті маємо $\xi_0(\tau) = -e^{-\tau}$. Остаточно, $x(t) = e^{-t} - e^{-t/\varepsilon}$, що відповідає головному члену розкладання точного розв'язку.

2.2.2. Асимптотично у нульовому і першому наближеннях розв'язати

$$2\dot{x}(t) = x(t) + y(t)e^t, \quad x(0) = 1, \quad \varepsilon\dot{y}(t) = 1 - x(t)y(t), \quad y(0) = 2.$$

Розв'язок задачі 2.2.2. Спочатку знайдемо нульове наближення (2.5а). Регулярний розв'язок задовольняє системі (2.5б):

$$\begin{cases} 2\dot{\bar{x}}_0(t) = \bar{x}_0(t) + \bar{y}_0(t)e^t, & \bar{x}_0(0) = 1, \\ 1 - \bar{x}_0(t)\bar{y}_0(t) = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи, отримаємо $\bar{x}_0(t) = e^{t/2}\sqrt{t+1}$ і $\bar{y}_0(t) = e^{-t/2}/\sqrt{t+1}$.

Пограничний розв'язок задовольняє системі (2.5в):

$$\begin{cases} \xi_0(\tau) = 0, \\ \dot{\eta}_0(\tau) = 1 - \bar{x}_0(0)[\bar{y}_0(0) + \eta_0(\tau)] = -\eta_0(\tau), & \eta_0(0) = y(0) - \bar{y}_0(0) = 1. \end{cases}$$

Знаходимо, що $\eta_0(\tau) = e^{-\tau}$. У результаті маємо нульове наближення у вигляді:

$$x_0(t) = e^{t/2}\sqrt{t+1}, \quad y_0(t) = e^{-t/2}/\sqrt{t+1} + e^{-t/\varepsilon}.$$

Для обчислення наступного наближення представляємо розв'язок у вигляді (2.6а). Розрахуємо необхідні функції:

$$\begin{aligned} \bar{f}_x(t) &= 1/2, & \bar{f}_y(t) &= e^t/2, & \bar{F}_x(t) &= -\bar{y}_0(t), & \bar{F}_y(t) &= -\bar{x}_0(t), \\ F_x(\tau) &= -1 + \eta_0(\tau), & F_y(\tau) &= -1, & \Delta F_x(\tau) &= -\eta_0(\tau), & \Delta F_y(\tau) &= 0, \\ \Delta f(\tau) &= \eta_0(\tau)/2, & \Delta F_t(\tau) &= 0, & G(\tau) &= -\eta_0(\tau)[\tau + \bar{x}_1(0)] \end{aligned}$$

та складемо систему (2.6б):

$$\begin{cases} 2\dot{\bar{x}}_1(t) = \bar{x}_1(t) + \bar{y}_1(t)e^t, & \bar{x}_1(0) = -\xi_1(0), \\ -\bar{y}_0(t)\bar{x}_1(t) - \bar{x}_0(t)\bar{y}_1(t) = \dot{\bar{y}}_0(t), \\ \xi_1(\tau) = -\int_{\tau}^{\infty} \eta_0(\tau')d\tau'/2, \\ \dot{\eta}_1(\tau) = [-1 + \eta_0(\tau)]\xi_1(\tau) - \eta_1(\tau) - \eta_0(\tau)[\tau + \bar{x}_1(0)], & \eta_1(0) = -\bar{y}_1(0). \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, послідовно знаходимо:

(а) $\xi_1(\tau) = -e^{-\tau}/2$, тоді $\bar{x}_1(0) = -\xi_1(0) = 1/2$;

(б) $\bar{y}_1(t) = -[\dot{\bar{y}}_0(t) + \bar{y}_0(t)\bar{x}_1(t)]/\bar{x}_0(t)$, тоді $\eta_1(0) = -\bar{y}_1(0) = 1/2$;

(в) рівняння для $\bar{x}_1(t) \in 4\dot{\bar{x}}_1(t) = 2t\bar{x}_1(t)/(t+1) + (t+2)/(t+1)^2$, яке разом з початковою умовою дає розв'язок: $\bar{x}_1(t) = e^{t/2}/\sqrt{t+1} - 1/[2(t+1)]$;

(г) рівняння для $\eta_1(\tau) \in \dot{\eta}_1(\tau) = -\eta_1(\tau) - e^{-2\tau}/2 - e^{-\tau}\tau$, яке разом з початковою умовою дає розв'язок: $\eta_1(\tau) = (e^{-2\tau} - e^{-\tau}\tau^2)/2$.

Узагальнюючи отримані результати, остаточно маємо:

$$x_0(t) = e^{t/2}\sqrt{t+1} + \varepsilon \left[\frac{e^{t/2}}{\sqrt{t+1}} - \frac{1}{2(t+1)} - \frac{e^{-t/\varepsilon}}{2} \right],$$

$$y_0(t) = \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{t+1}} + e^{-t/\varepsilon} + \varepsilon \left[\frac{e^{-t}(t+3)}{2(t+1)^2} - \frac{e^{-t/2}}{(t+1)^{3/2}} + \frac{e^{-2t/\varepsilon} - e^{-t/\varepsilon}(t/\varepsilon)^2}{2} \right].$$

Завдання для самостійної роботи до підрозділу 2.2

2.2.3. У нульовому наближенні при $\varepsilon \ll 1$ розв'язати задачу

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)y(t)e^t, & x(0) = 2, \\ \varepsilon \dot{y}(t) = (t+1)^2 - y(t)/x(t), & y(0) = 1. \end{cases}$$

2.2.4. Точно і асимптотично у нульовому і першому наближеннях по $\varepsilon \ll 1$ розв'язати задачу

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}(t) = -2x(t) - y(t), & x(0) = 1, \\ \varepsilon \dot{y}(t) = x(t) + 2e^{-t}, & y(0) = 1. \end{cases}$$

Порівняти результати.

2.2.5. Вважаючи, що $\hbar \rightarrow 0$, побудувати розв'язок стаціонарного рівняння Шредінгера

$$\hbar^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} = -p^2(x)\psi(x), \quad p(x) = \sqrt{2m[E - U(x)]}$$

у нульовому і першому наближеннях, зробивши заміну

$$\psi(x) = \exp [i\hbar^{-1}S_0(x) + S_1(x) + O(\hbar)]$$

у рівнянні Шредінгера і порівнюючи коефіцієнти при рівних ступенях \hbar , при довільній енергії E .

Вказівка до задачі 2.2.5. Для функцій $S_0(x)$ та $S_1(x)$ отримайте рівняння: $[S'_0(x)]^2 = p^2(x)$, $2S'_0(x)S'_1(x) + S''_0(x) = 0$ та проінтегруйте їх.

2.3. Слабка нелінійність у рівняннях коливань

Метод Ван-дер-Поля. Розв'язок нелінійного рівняння коливань

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \varepsilon f[x(t), \dot{x}(t)] \quad (2.7)$$

при достатньо малому значенні параметра ε може бути представлено у вигляді

$$x(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad (2.8a)$$

де $a(t)$ і $\varphi(t)$ — нові невідомі функції, які повільно змінюються з часом t і можуть бути асимптотично знайдені з системи рівнянь

$$\dot{a}(t) = \varepsilon A[a(t)], \quad \dot{\varphi}(t) = \varepsilon \Phi[a(t)], \quad (2.8б)$$

$$A[a] = -\frac{1}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} f[a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi] \sin \psi d\psi, \quad (2.8в)$$

$$\Phi[a] = -\frac{1}{2\pi\omega_0 a} \int_0^{2\pi} f[a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi] \cos \psi d\psi. \quad (2.8г)$$

Покажемо, яким чином можна отримати рівняння (2.8б) для $a(t)$ і $\varphi(t)$. Для цього зауважимо, що замість однієї невідомої функції $x(t)$ рівнянням (2.8a) введено дві інші $a(t)$ та $\varphi(t)$. Для визначеності необхідно додати умову, яка пов'язує ці невідомі. Такою умовою у методі Ван-дер-Поля є наступна рівність:

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 a(t) \sin(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad (2.9)$$

яка за змістом позначає, що $\dot{x}(t)$ має таку ж структуру, як при постійних $a(t)$ та $\varphi(t)$. В той же час з рівняння (2.8a) випливає, що

$$\dot{x}(t) = \dot{a}(t) \cos \psi(t) - a(t)[\omega_0 + \dot{\varphi}(t) \sin \psi(t)] \sin \psi(t),$$

де для скорочення введено позначення $\psi(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$. Порівнюючи вирази для $\dot{x}(t)$, знаходимо, що похідні $\dot{a}(t)$ та $\dot{\varphi}(t)$ виявляються пов'язаними наступним співвідношенням:

$$\dot{a}(t) \cos \psi(t) - a(t) \dot{\varphi}(t) \sin \psi(t) = 0. \quad (2.10a)$$

Диференціюючи рівняння (2.9) та підставляючи отриманий $\ddot{x}(t)$ у початкове рівняння (2.7), отримуємо ще одне співвідношення, що пов'язує $\dot{a}(t)$ та $\dot{\varphi}(t)$:

$$\dot{a}(t) \sin \psi(t) + a(t) \dot{\varphi}(t) \cos \psi(t) = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} f[a \cos \psi(t), -a\omega_0 \sin \psi(t)]. \quad (2.10б)$$

Далі розв'яжемо систему рівнянь (2.10) відносно $\dot{a}(t)$ та $\dot{\varphi}(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{a}(t) &= -\frac{\varepsilon}{\omega_0} f[a(t) \cos \psi(t), -a(t)\omega_0 \sin \psi(t)] \sin \psi(t), \\ \dot{\varphi}(t) &= -\frac{\varepsilon}{a(t)\omega_0} f[a(t) \cos \psi(t), -a(t)\omega_0 \sin \psi(t)] \cos \psi(t).\end{aligned}$$

Якщо ε достатньо мале, то амплітуда $a(t)$ і фаза $\varphi(t)$ виявляються повільно змінними функціями часу. Це означає, що протягом одного періоду коливання в головному наближенні можна вважати $a(t)$ та $\varphi(t)$ постійними величинами. Тоді можна усереднити $\dot{a}(t)$ і $\dot{\varphi}(t)$ у кожен момент часу по одному періоду коливань, що еквівалентно усередненню по фазі ψ на інтервалі завдовжки 2π . У результаті такого усереднення отримаємо систему рівнянь (2.8б)-(2.8г).

Зауваження: Метод Ван-дер-Поля не дає можливості уточнювати отриманий розв'язок, тобто визначати наступні наближення. Узагальнення цього методу, яке не має цієї вади, можна знайти у [3] під назвою «метод Крилова–Боголюбова».

Метод ангармонічних коливань. Нехай коливання описуються рівнянням (2.7) при $\varepsilon \ll 1$. Будемо шукати розв'язок цього рівняння у вигляді ряду $x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$, де нульове наближення має вигляд гармонічних коливань $x_0(t) = a_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$, частота яких ω відрізняється від ω_0 та може бути знайдена у вигляді ряду $\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots$, а a_0 та φ_0 — постійна амплітуда та фаза. Нехай попередні наближення $x_k(t)$ та ω_k знайдені для всіх $k < n$. Тоді, розкладаючи рівняння (2.7) до членів порядку ε^n , ми отримуємо рівняння для $x_n(t)$ у вигляді:

$$\ddot{x}_n(t) + \omega^2 x_n(t) = F_n^{(\text{res})}(t) + F_n(t), \quad (2.11)$$

де сили $F_n^{(\text{res})}(t)$ та $F_n(t)$, по-перше, виражені через попередні наближення $x_{k < n}(t)$ та $\omega_{k < n}$, а також через ω_n , а по-друге, $F_n^{(\text{res})}(t)$ призводить до резонансу, тобто має вигляд $F_n^{(\text{res})} \cos(\omega t + \varphi)$. У такому разі невідома поправка до частоти ω_n повинна бути знайдена з умови «нерезонансу»: $F_n^{(\text{res})} = 0$, а невідома поправка до коливань $x_n(t)$ — з рівняння (2.11), де в правій частині залишається тільки нерезонансна сила $F_n(t)$.

Приклади завдань з розв'язками до підрозділу 2.3

2.3.1. Система здійснює затухаючі коливання, які описуються рівнянням $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = -\varepsilon \dot{x}(t)$. Знайти точний розв'язок цього рівняння руху і порівняти його з наближеним розв'язком, отриманим методом Ван-дер-Поля.

Розв'язок задачі 2.3.1. Точний розв'язок може бути знайдений у вигляді $\exp(\lambda t)$, складаючи характеристичне рівняння $\lambda^2 + \varepsilon \lambda + \omega_0^2 = 0$. Тоді

отримуємо наступний розв'язок: $x(t) = a_0 \exp(-\varepsilon t/2) \cos(\omega t + \phi_0)$, де a_0 та ϕ_0 — константи інтегрування, а $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2/4} \approx \omega_0 - \varepsilon^2/(8\omega_0)$.

Для знаходження наближеного розв'язку за допомогою метода Ван-дер-Поля скористаємося рівняннями (2.8б)-(2.8г):

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} a\omega_0 \sin^2 \psi d\psi = -\frac{\varepsilon a}{2}, \text{ тобто } a(t) = a_0 e^{-\varepsilon t/2};$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon}{2\pi a\omega_0} \int_0^{2\pi} a\omega_0 \sin \psi \cos \psi d\psi = 0, \text{ тобто } \varphi(t) = \varphi_0.$$

У результаті маємо $x(t) \approx a_0 e^{-\varepsilon t/2} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, що відповідає точному розв'язку, якщо знехтувати внеском порядку ε^2 у фазу (частоту) коливань.

2.3.2. Система здійснює коливання, які описуються рівнянням

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = -\varepsilon x^3(t).$$

Визначити наступні поправки до частоти ω_0 та амплітуди a_0 коливань за умови, що $\varepsilon \ll 1$, двома способами:

- (а) методом Ван-дер-Поля;
- (б) методом ангармонічних коливань.

Порівняти результати.

Розв'язок задачі 2.3.2а. Скористаємося рівняннями (2.8б)-(2.8г):

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} a^3 \cos^3 \psi \sin \psi d\psi = 0, \text{ тобто } a(t) = a_0;$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\varepsilon}{2\pi a\omega_0} \int_0^{2\pi} a^3 \cos^4 \psi d\psi = \frac{3\varepsilon a_0^2}{8\omega_0}, \text{ тобто } \varphi(t) = \frac{3\varepsilon a_0^2 t}{8\omega_0} + \varphi_0.$$

У результаті маємо $x(t) = a_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$, де $\omega = \omega_0 + 3\varepsilon a_0^2/8\omega_0$.

Розв'язок задачі 2.3.2б. Представимо розв'язок у вигляді

$$x(t) = a_0 \cos(\omega t + \varphi_0) + \varepsilon x_1(t), \text{ де } \omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1,$$

підставимо його у вихідне рівняння і розкладемо, зберігаючи головне наближення і поправки порядку ε . Для окремих доданків отримаємо:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -a_0\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) + \varepsilon \ddot{x}_1, & \varepsilon x^3 &= \varepsilon a_0^3 \cos^3(\omega t + \varphi_0), \\ \omega_0^2 x &= \omega^2 x - 2\varepsilon\omega\omega_1 x = \varepsilon\omega^2 x_1 + a_0\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) - 2\varepsilon a_0\omega\omega_1 \cos(\omega t + \varphi_0). \end{aligned}$$

Знижуючи степінь $\cos^3(\omega t + \varphi_0)$, записуємо рівняння для $x_1(t)$ у наступному вигляді:

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 2a_0\omega_0 \left(\omega_1 - \frac{3a_0^2}{8\omega} \right) \cos(\omega t + \varphi_0) - \frac{3a_0^3}{4} \cos(3\omega t + 3\varphi_0).$$

Перший доданок у правій частині є резонансним, тобто буде вносити в $x_1(t)$ лінійно зростаючий доданок. Оскільки ми шукаємо поправку до обмеженої функції, то таких зростаючих рішень бути не повинно. Це означає, що резонансний доданок повинен обертатись у нуль, тобто $\omega_1 = 3\epsilon a_0^2/8\omega_0$. Після чого x_1 можна шукати у вигляді $b \cos(3\omega t + 3\varphi_0)$ і визначити, що $b = 3a_0^3/32\omega^2$.

Остаточно, представляючи розв'язок у вигляді $x(t) \approx a(t) \cos(\omega t + \varphi_0)$, знаходимо $a(t) = a_0 + 3\epsilon a_0^3 [2 \cos(2\omega t + 2\varphi_0) - 1]/32\omega_0^2$ та $\omega = \omega_0 + 3\epsilon a_0^2/8\omega_0$.

Порівнюючи обидва методи, бачимо, що метод Ван-дер-Поля дав правильний вираз для першої поправки по частоті, але не дав першої поправки по амплітуді.

Завдання для самостійної роботи до підрозділу 2.3

2.3.3. Показати, що якщо функція $f[x, y]$ у рівнянні (2.7) не залежить від другого аргументу y , то метод Ван-дер-Поля дає $a(t) = \text{const}$. Який результат дасть цей метод, якщо функція $f[x, y]$ не залежить від першого аргументу?

2.3.4. Розв'язати задачу (2.7) методом Ван-дер-Поля, якщо:

(а) $f[x, y] = (1 - x^4)y$;

(б) $f[x, y] = (\omega x - y)^3$.

2.3.5. За допомогою методу Ван-дер-Поля дослідіть поведінку системи при достатньо великому часі $t \gg 1$ та для довільних a_0 і ϕ_0 , якщо

$$f[x, y] = -\frac{y}{a_0^2 + x^2}, \quad x(t=0) = a_0 \cos \phi_0, \quad \dot{x}(t=0) = -\omega_0 a_0 \sin \phi_0.$$

Вказівка до задачі 2.3.5. Розв'язуючи рівняння (2.8в), отримайте залежність $a(t)$ у неявному вигляді,

$$\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1) - \sqrt{1 + a^2(t)/a_0^2} - \ln\left(\sqrt{1 + a^2(t)/a_0^2} - 1\right) = \epsilon t/a_0^2,$$

та проаналізуйте її при достатньо великому часі $t \gg 1$.

2.3.6. Розв'язати задачу 2.3.2 для системи, яка описується рівнянням

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = -\epsilon x^2(t).$$

Вказівка до задачі 2.3.6. Дійте аналогічно до задачі 2.3.2. Однак у першому порядку $\omega_1 = 0$. Це означає, що необхідно розкласти до другого порядку і обчислити ω_2 .

2.4. Графіки розв'язків диференціальних рівнянь

Фазовим портретом системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), y(t)), \\ \dot{y}(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases} \quad (2.12)$$

називають сукупність всіх можливих траєкторій системи (2.12), побудованих на фазовій площині (x, y) .

Асимптотичний метод фазової площини полягає у знаходженні стаціонарних та особливих точок системи (2.12), побудуванні асимптотичного фазового портрету поблизу кожної з таких точок, а потім об'єднанні отриманих результатів у загальний фазовий портрет.

Зауваження: Фазовим портретом диференціального рівняння другого порядку $\ddot{x} = h(x(t), \dot{x}(t))$ називають сукупність всіх можливих траєкторій системи

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = h(x(t), y(t)), \end{cases} \quad (2.13)$$

побудованих на фазовій площині (x, y) , яку інколи позначають (x, \dot{x}) .

Приклади завдань з розв'язками до підрозділу 2.4

2.4.1. Знайти при $|x| \ll 1$ та $|x| \gg 1$ асимптотичний розв'язок диференціального рівняння

$$y'(x) + xy^3(x) = x^4, \quad y(0) = 0.$$

Виходячи з отриманих результатів, побудувати графік розв'язку $y(x)$.

Розв'язок задачі 2.4.1. Знайдемо асимптотичний розв'язок рівняння так само, як у завданні 2.1.4.

Почнемо з граничного випадку $|x| \gg 1$ і припустимо, що одним з доданків у даному рівнянні можна знехтувати. Припустимо, що $|y'(x)| \ll x^4$. Тоді вихідне рівняння перетворюється на $y(x) = x$. Перевіряємо, що припущення (гіпотеза) правильне: $|y'(x)| = 1 \ll x^4$. Безпосередньо переконуємось, що інші можливості $|xy(x)| \ll x^4$ і $x^4 \ll |y'(x)|$ призводять до протиріччя. Тому розв'язком даного рівняння при $|x| \gg 1$ є $y(x) = x$. Для більшої точності побудови графіка знайдемо наступне наближення. Для цього представимо розв'язок у вигляді $y(x) = x + y_1(x)$, де $y_1(x)$ — наступне наближення. Підставляючи до вихідного рівняння та розкладаючи за малим $|y_1(x)| \ll |x|$, отримуємо рівняння $y_1'(x) + 3x^3y_1(x) + 1 = 0$. Припустимо, що $|y_1'(x)| \ll 1$,

тоді отримуємо розв'язок у вигляді $y_1(x) = -1/(3x^3)$. Перевіряємо, що отриманий розв'язок відповідає припущенню: $|y_1'(x)| = 1/x^4 \ll 1$. Безпосередньо переконуємось, що інші можливості $|x^3 y_1(x)| \ll 1$ і $1 \ll |y_1'(x)|$ призводять до протиріччя.

В іншому граничному випадку $|x| \ll 1$ припустимо, що $|xy^3(x)| \ll |x^4|$. Тоді вихідне рівняння спрощується, $y'(x) = x^4$, а його розв'язком є $y(x) = x^5/5$ (константу інтегрування знайшли з початкової умови). Перевіряємо, що припущення правильне: $|xy^3(x)| = |x^{16}/125| \ll |x^4|$. Безпосередньо переконуємось, що інші можливості $|y'(x)| \ll |x^4|$ і $|x^4| \ll |y'(x)|$ призводять до протиріччя.

Зобразимо штриховою лінією отримані асимптотики і з'єднаємо схематично, як у задачі 1.5.1.

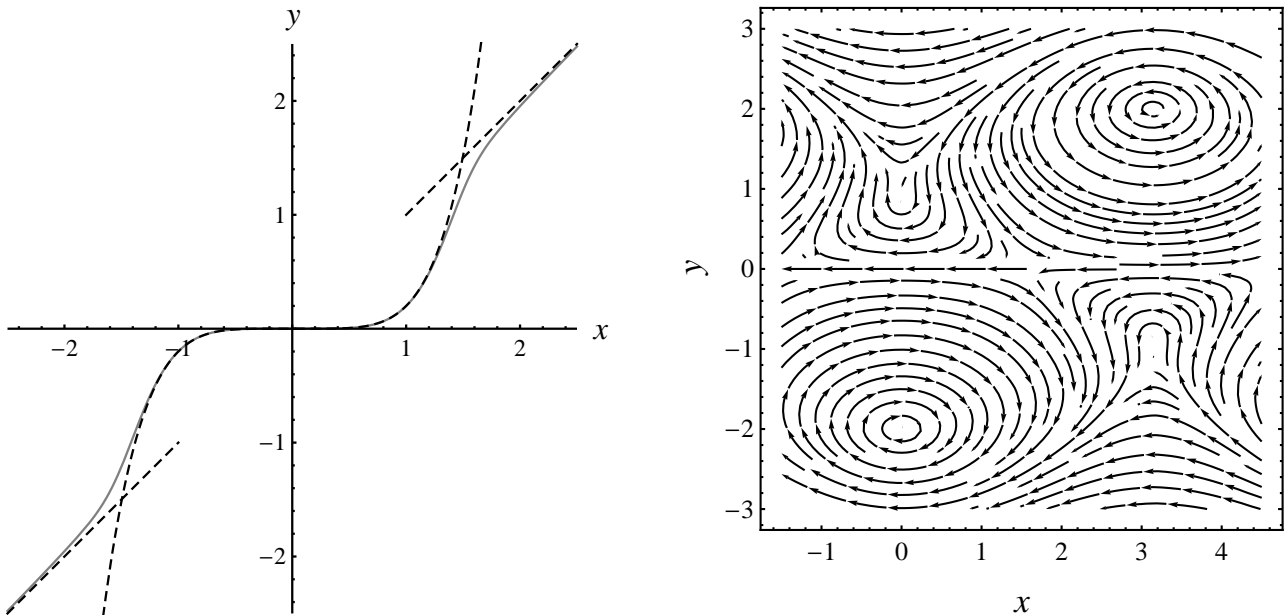


Рис. 2.1: Графіки до задач 2.4.1 (ліворуч) і 2.4.2 (праворуч)

2.4.2. Побудувати при $a = 3$ і $b = 2$ фазовий портрет системи

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a - y^2(t) - by^{-1}(t) \cos x(t), \\ \dot{y}(t) = -b \sin x(t). \end{cases}$$

Розв'язок задачі 2.4.2. Визначимо стаціонарні та особливі точки.

Для знаходження стаціонарних точок покладемо у початковій системі $\dot{x} = 0$ і $\dot{y} = 0$ і отримаємо рівняння $\sin x = 0$ і $3 - y^2 - 2y^{-1} \cos x = 0$, звідки $x_k = \pi k$ і $y^3 - 3y + 2(-1)^k = 0$. Розв'язуючи кубічне рівняння, маємо $y_{1,k} = -2(-1)^k$ і $y_{2,k} = (-1)^k$. Оскільки фазовий портрет є періодичним (з періодом 2π по x) та центрально-симетричним відносно точки $(\pi/2, 0)$, то розглянемо тільки

наступні пари (x, y) : $(\pi, 2)$ та $(0, 1)$. Решта стаціонарних точок портрету може бути отримана зображенням $(x, y) \mapsto (x \pm \pi, -y)$ і зсувом $(x, y) \mapsto (x \pm 2\pi, y)$.

Почнемо з точки $(\pi, 2)$. Введемо у розгляд нові змінні: $x = \pi + \xi$, $y = 2 + \eta$. Лінеаризуємо вихідну систему, вважаючи z та u малими, та отримуємо: $\dot{\xi} = -9\eta/2$, $\dot{\eta} = 2\xi$. Перемножуючи, $2\xi\dot{\xi} = -9\eta\dot{\eta}/2$, та інтегруючи, отримуємо фазові траєкторії у неявному вигляді $4\xi^2 + 9\eta^2 = \text{const}$. Тоді точка $(\pi, 2)$ — центр, а фазові траєкторії в її околиці — еліпси зі співвідношенням півосей $l_x/l_y = 3/2$.

Тепер розглянемо точку $(0, 1)$ та введемо нові змінні, $x = \xi$, $y = 1 + \eta$, для яких отримаємо систему $\dot{\xi} = 0$, $\dot{\eta} = -2\xi$. Таким чином, $(0, 1)$ — вироджена особлива точка і фазові траєкторії в її околиці — вертикальні прямі $x = \text{const}$. Для того, щоб все ж таки виявити відмінність фазових траєкторій від прямих, ми візьмемо до уваги доданки другого порядку за η (тобто y). Тоді отримаємо $\dot{\xi} = -3\eta^2$, $\dot{\eta} = -2\xi$, що після перемноження та інтегрування зводиться до $\xi^2 - \eta^3 = \text{const}$. При $\text{const} > 0$ криві огинають точку $(0, 1)$ знизу, а при $\text{const} < 0$ — проходять зверху точки $(0, 1)$.

Окрім вивчених стаціонарних точок окремого розгляду вимагає пряма $y = 0$, оскільки у рівнянні є доданок $fy^{-1}(t) \cos x(t)$. Всі траєкторії поблизу цієї прямої наближаються до неї як до асимптоти завдяки цьому доданку. Окрім того, на цій прямій існують виділені точки $x_l = \pi(l + 1/2)$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. У цих точках наведений доданок обертається в нуль через $\cos x$. Розглянемо траєкторії поблизу цих особливих точок на прикладі $(x, y) = (\pi/2, 0)$ (інші особливі точки можна отримати зазначеними вище зсувами і відображеннями). Для цього введемо у розгляд нові змінні $\zeta = (x - \pi/2)/y$ і $\eta = y$, тоді, розкладаючи початкове рівняння по малості η і вважаючи ζ порядку 1, отримаємо систему: $\eta\dot{\zeta} = 3 + 4\zeta$, $\dot{\eta} = -2$. Звідси $-2\dot{\zeta}/(3 + 4\zeta) = \dot{\eta}/\eta$. Інтегрування дає $\zeta + 3/4 = C/\eta^2$, де $C = \text{const}$. Або, повертаючись до початкових змінних, отримаємо гіперболи $x - \pi/2 = C/y - 3y/4$.

Зобразимо всі досліджені особливості на фазовій площині і доповнимо портрет у проміжках (рис. 2.1).

Завдання для самостійної роботи до підрозділу 2.4

2.4.3. Знайти при $|x| \ll 1$ та $|x| \gg 1$ асимптотичний розв'язок диференціального рівняння

$$y'(x) + xy^3(x) = \exp(-x), \quad y(0) = 0.$$

Виходячи з отриманих результатів, побудувати графіки $y(x)$ його можливих розв'язків.

Вказівка до задачі 2.4.3. Майте на увазі, що граничний випадок $|x| \ll 1$ являє собою два різні випадки при $x > 0$ та $x < 0$, відповідно, оскільки $\exp(-x)$ має у цих двох випадках різну поведінку.

2.4.4. Побудувати фазовий портрет рівняння коливань

$$\ddot{x}(t) - x(t) + x^3(t) = 0.$$

2.4.5. Побудувати фазовий портрет системи $\begin{cases} \dot{x}(t) = \sin y(t), \\ \dot{y}(t) = \sin x(t). \end{cases}$

2.4.6. Розв'язати задачу **2.4.2** при $a = 2$ та $b = 4$.

2.5. Приклади індивідуальних завдань до розділу 2

Варіант 1

1. Розв'язати точно і асимптотично в головному і наступному наближеннях за малим параметром τ диференціальне рівняння

$$y'(x) - \tau \operatorname{tg}(\tau x)y(x) = \exp(\tau^2 x).$$

Порівняти результати, розкладаючи точний розв'язок за малим параметром.

2. Розв'язати асимптотично в головному і наступному наближеннях за малим параметром μ систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = \ln [y(t) + \mu x(t)], & x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \\ \dot{y}(t) = \sin [\mu x(t)y(t)], & y(0) = 1. \end{cases}$$

3. Розв'язати асимптотично в головному і наступному наближеннях за малим параметром ε систему $\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t), & x(0) = 2, \\ \varepsilon \dot{y}(t) = 1 - x^2(t)y(t), & y(0) = 0. \end{cases}$

4. Розв'язати методом Ван-дер-Поля при $\rho \ll 1$ рівняння коливань

$$\ddot{x}(t) + x(t) = \rho x(t)(x^2(t) + \dot{x}^2(t))^{-1}.$$

5. Знайти наступну поправку до головного значення $\omega_0 = 1$ частоти ангармонічних коливань $x(t) = a \cos(\omega t + \phi)$, описаних рівнянням

$$\ddot{x} + [x(t)\dot{x}^2(t) + 1]x(t) = 0, \quad \text{при } |a| \ll 1.$$

6. Розв'язати при $|x| \ll 1$ і $|x| \gg 1$ асимптотично диференціальне рівняння $y'(x) + xy^2(x) = x^3 e^{-x}$, $y(0) = 0$. Виходячи з отриманих результатів, побудувати графіки його можливих розв'язків.

7. Побудувати фазовий портрет системи $\begin{cases} \dot{x}(t) = y^3(t) - x(t), \\ \dot{y}(t) = y(t) - x^3(t). \end{cases}$

Варіант 2

1. Розв'язати точно і асимптотично в головному і наступному наближеннях за малим параметром ρ диференціальне рівняння

$$xy'(x) \ln x + 3y(x) = (x + \rho)^3.$$

Порівняти результати, розкладаючи точний розв'язок за малим параметром.

2. Розв'язати асимптотично в головному і наступному наближеннях за малим параметром τ систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \arcsin [\tau(x(t) - y(t))], & x(0) = e^{-\tau}, \\ \dot{y}(t) = -y(t) \ln [y(t) + \tau x(t)], & y(0) = e^{\tau}. \end{cases}$$

3. Розв'язати асимптотично в головному і наступному наближеннях за малим параметром ε систему $\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t), & x(0) = 1, \\ \varepsilon \dot{y}(t) = -x(t)y(t), & y(0) = 1. \end{cases}$

4. Розв'язати методом Ван-дер-Поля при $\kappa \ll 1$ рівняння коливань

$$\ddot{x}(t) + x(t) = \kappa(\dot{x}^3(t) - x^3(t)).$$

5. Знайти наступну поправку до головного значення $\omega_0 = 1$ частоти ангармонічних коливань $x(t) = a \cos(\omega t + \phi)$, описаних рівнянням

$$\ddot{x} + [\dot{x}^4(t) + 1]x(t) = 0, \text{ при } |a| \ll 1.$$

6. Розв'язати при $|x| \ll 1$ і $|x| \gg 1$ асимптотично диференціальне рівняння $y'(x) + x^2 y^2(x) = x^4$, $y(0) = 0$. Виходячи з отриманих результатів, побудувати графіки його можливих розв'язків.

7. Побудувати фазовий портрет системи $\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) - x(t), \\ \dot{y}(t) = y(t) - x^3(t). \end{cases}$

Варіант 3

1. Розв'язати точно і асимптотично в головному і наступному наближеннях за малим параметром μ диференціальне рівняння

$$\frac{z'(x)}{x \sin(\mu x^2)} + \left(z - \frac{1}{\sin(\mu x^2)} \right)^2 = \frac{1}{\sin^2(\mu x^2)}.$$

Порівняти результати, розкладаючи точний розв'язок за малим параметром.

2. Розв'язати асимптотично в головному і наступному наближеннях за малим параметром ϵ систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \sin [x(t) + \epsilon y(t)] = 0, & x(0) = \epsilon, \quad \dot{x}(0) = 2e^\epsilon, \\ \dot{y}(t) = \cos [\epsilon y(t)], & y(0) = 0. \end{cases}$$

3. Розв'язати асимптотично в головному і наступному наближеннях за малим параметром ε систему
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = e^{-t} + y(t)/x(t), & x(0) = 1, \\ \varepsilon \dot{y}(t) = x(t)e^{-t} - y(t), & y(0) = 0. \end{cases}$$

4. Розв'язати методом Ван-дер-Поля при $\gamma \ll 1$ рівняння коливань

$$y''(x) + \omega_0^2 y(x) = \gamma \frac{y(x) + y'(x)}{y^2(x) + y'^2(x)}.$$

5. Знайти наступну поправку до головного значення $\omega_0 = 1$ частоти ангармонічних коливань $x(t) = a \cos(\omega t + \phi)$, описаних рівнянням

$$\ddot{x} + (x^3(t) + 1)x(t) = 0, \text{ при } |a| \ll 1.$$

6. Розв'язати при $|x| \ll 1$ і $|x| \gg 1$ асимптотично диференціальне рівняння $y'(x)y(x) + x = e^{y(x)}$, $y(0) = 0$. Виходячи з отриманих результатів, побудувати графіки його можливих розв'язків.

7. Побудувати фазовий портрет системи
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y^2(t) - y(t), \\ \dot{y}(t) = -x(t) + x^2(t) - y(t). \end{cases}$$

Варіант 4

1. Розв'язати точно і асимптотично в головному і наступному наближеннях за малим параметром ζ диференціальне рівняння

$$\frac{y'(x)}{x^2} + \frac{y(x)}{x} = \frac{\exp(-x^3) \cos(\zeta x)}{y^2(x)}.$$

Порівняти результати, розкладаючи точний розв'язок за малим параметром.

2. Розв'язати асимптотично в головному і наступному наближеннях за малим параметром β систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \exp[\beta x^2(t)y(t)], & x(0) = e^\beta, \\ \dot{y}(t) = [1 + \beta x^2(t)y^2(t)]^{-1}, & y(0) = e^{2\beta^2}. \end{cases}$$

3. Розв'язати асимптотично в головному і наступному наближеннях за малим параметром ε систему
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x^2(t) + y(t), & x(0) = 2, \\ \varepsilon \dot{y}(t) = x^2(t) - y(t), & y(0) = 0. \end{cases}$$

4. Розв'язати методом Ван-дер-Поля при $\mu \ll 1$ рівняння коливань

$$y''(x) - \mu y'^3(x)(1 + y^2(x)) + \omega_0^2 y(x) = 0.$$

5. Знайти наступну поправку до головного значення $\omega_0 = 1$ частоти ангармонічних коливань $x(t) = a \cos(\omega t + \phi)$, описаних рівнянням

$$\ddot{x} + (\dot{x}^2(t) + 1)x(t) = 0, \text{ при } |a| \ll 1.$$

6. Розв'язати при $|x| \ll 1$ і $|x| \gg 1$ асимптотично диференціальне рівняння $y'(x) + x^2 y^2(x) = x^6$, $y(0) = 0$. Виходячи з отриманих результатів, побудувати графіки його можливих розв'язків.

7. Побудувати фазовий портрет системи
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) - y(t) + y^3(t), \\ \dot{y}(t) = x(t). \end{cases}$$

Варіант 5

1. Розв'язати точно і асимптотично в головному і наступному наближеннях за малим параметром ω диференціальне рівняння

$$\dot{x}(t) - e^{\omega t - x(t)} + \operatorname{tg}(\omega t) = 0.$$

Порівняти результати, розкладаючи точний розв'язок за малим параметром.

2. Розв'язати асимптотично в головному і наступному наближеннях за малим параметром γ систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + 2 \operatorname{tg}[\gamma y(t)], & x(0) = 1, \\ \dot{y}(t) = y(t) e^{\gamma x(t)}, & y(0) = -\cos \gamma. \end{cases}$$

3. Розв'язати асимптотично в головному і наступному наближеннях за малим параметром ε систему
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) - y^3(t), & x(0) = 1, \\ \varepsilon \dot{y}(t) = x^2(t) - y(t), & y(0) = 0. \end{cases}$$

4. Розв'язати методом Ван-дер-Поля при $\kappa \ll 1$ рівняння коливань

$$\ddot{x}(t) + x(t) = -\kappa \dot{x}^4(t).$$

5. Знайти наступну поправку до головного значення $\omega_0 = 1$ частоти ангармонічних коливань $x(t) = a \cos(\omega t + \phi)$, описаних рівнянням

$$\ddot{x} + [\dot{x}^2(t) + 1]x(t) = 0, \text{ при } |a| \ll 1.$$

6. Розв'язати при $|x| \ll 1$ і $|x| \gg 1$ асимптотично диференціальне рівняння $y'(x) + x^3 y^3(x) = x^2$, $y(0) = 0$. Виходячи з отриманих результатів, побудувати графіки його можливих розв'язків.

7. Побудувати фазовий портрет рівняння

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) - x^3(t) = 0.$$

Варіант 6

1. Розв'язати точно і асимптотично в головному і наступному наближеннях за малим параметром α диференціальне рівняння

$$y'(x) + 2xy(x) = x \sin(\alpha x^2).$$

Порівняти результати, розкладаючи точний розв'язок за малим параметром.

2. Розв'язати асимптотично в головному і наступному наближеннях за малим параметром γ систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \exp [x(t) + \gamma y(t)], & x(0) = 0, \\ \dot{y}(t) = \sin [\gamma x(t)y(t)], & y(0) = \cos \gamma. \end{cases}$$

3. Розв'язати асимптотично в головному і наступному наближеннях за малим параметром ε систему $\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t), & x(0) = 1, \\ \varepsilon \dot{y}(t) = x(t) - y(t)/x(t), & y(0) = 0. \end{cases}$

4. Розв'язати методом Ван-дер-Поля при $\zeta \ll 1$ рівняння коливань

$$y''(x) + \left[1 - \frac{\zeta}{y^2(x) + y'^2(x)} \right] y(x) = 0.$$

5. Знайти наступну поправку до головного значення $\omega_0 = 1$ частоти ангармонічних коливань $x(t) = a \cos(\omega t + \phi)$, описаних рівнянням

$$\ddot{x} + \dot{x}^2(t) + x(t) = 0, \text{ при } |a| \ll 1.$$

6. Розв'язати при $|x| \ll 1$ і $|x| \gg 1$ асимптотично диференціальне рівняння $y'(x) + x^2 y^3(x) = x^3$, $y(0) = 0$. Виходячи з отриманих результатів, побудувати графіки його можливих розв'язків.

7. Побудувати фазовий портрет системи $\begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) - y^2(t), \\ \dot{y}(t) = -x(t) - x^2(t). \end{cases}$

Варіант 7

1. Розв'язати точно і асимптотично в головному і наступному наближеннях за малим параметром ε диференціальне рівняння

$$y'(x) + 3x^2 y(x) = x \cos(\varepsilon x).$$

Порівняти результати, розкладаючи точний розв'язок за малим параметром.

2. Розв'язати асимптотично в головному і наступному наближеннях за малим параметром κ систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \ln [1 + \kappa x(t)y(t)], & x(0) = e^\kappa, \\ \dot{y}(t) = \exp [\kappa x(t) + y(t)], & y(0) = \kappa \cos \kappa. \end{cases}$$

3. Розв'язати асимптотично в головному і наступному наближеннях за малим параметром ε систему $\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t), & x(0) = 1, \\ \varepsilon \dot{y}(t) = 1 - x(t)y(t), & y(0) = 0. \end{cases}$

4. Розв'язати методом Ван-дер-Поля при $\mu \ll 1$ рівняння коливань

$$y''(x) - \mu y'^3(x) + y(x) = 0.$$

5. Знайти наступну поправку до головного значення $\omega_0 = 1$ частоти ангармонічних коливань $x(t) = a \cos(\omega t + \phi)$, описаних рівнянням

$$\ddot{x} + x(t) = -\dot{x}^2(t)x(t), \text{ при } |a| \ll 1.$$

6. Розв'язати при $|x| \ll 1$ і $|x| \gg 1$ асимптотично диференціальне рівняння $y'(x) + y^3(x) \operatorname{sh} x = x$, $y(0) = 0$. Виходячи з отриманих результатів, побудувати графіки його можливих розв'язків.

7. Побудувати фазовий портрет рівняння

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}^2(t) - x(t)[1 + 2\dot{x}(t)] + x^2(t) = 0.$$

Варіант 8

1. Розв'язати точно і асимптотично в головному і наступному наближеннях за малим параметром β диференціальне рівняння

$$\dot{x}(t) + 2t = te^{x(t)} \sin(\beta t^2).$$

Порівняти результати, розкладаючи точний розв'язок за малим параметром.

2. Розв'язати асимптотично в головному і наступному наближеннях за малим параметром ρ систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = \sin[\rho x(t)] \dot{y}(t) \operatorname{ch} t, & x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \operatorname{arctg} \rho^{-1}, \\ \dot{y}(t) = \sin[\dot{x}(t) + y(t)], & y(0) = \pi. \end{cases}$$

3. Розв'язати асимптотично в головному і наступному наближеннях за малим параметром ε систему $\begin{cases} \dot{x}(t) = x^{-1}(t)e^{-y(t)}, & x(0) = 1, \\ \varepsilon \dot{y}(t) = x^2(t) - y(t), & y(0) = 0. \end{cases}$

4. Розв'язати методом Ван-дер-Поля при $\alpha \ll 1$ рівняння коливань

$$\ddot{x}(t) + x(t) = \alpha \frac{x(t) - \dot{x}(t)}{x^2(t) + \dot{x}^2(t)}.$$

5. Знайти наступну поправку до головного значення $\omega_0 = 1$ частоти ангармонічних коливань $x(t) = a \cos(\omega t + \phi)$, описаних рівнянням

$$\ddot{x} + [x^4(t) + 1]x(t) = 0, \text{ при } |a| \ll 1.$$

6. Розв'язати при $|x| \ll 1$ і $|x| \gg 1$ асимптотично диференціальне рівняння $y'(x) + y^2(x) = |x|^x - \exp(-x^2)$, $y(0) = 0$. Виходячи з отриманих результатів, побудувати графіки його можливих розв'язків.

7. Побудувати фазовий портрет рівняння

$$\ddot{x}(t) + [x(t) - \dot{x}(t)]^3 - x(t) = 0.$$

Варіант 9

1. Розв'язати точно і асимптотично в головному і наступному наближеннях за малим параметром ω диференціальне рівняння

$$(\dot{x}(t) + 3t^2)e^{t^3+x(t)} = t \cos(\omega t).$$

Порівняти результати, розкладаючи точний розв'язок за малим параметром.

2. Розв'язати асимптотично в головному і наступному наближеннях за малим параметром ζ систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) \sin [\zeta y(t)], & x(0) = \sin \zeta, \\ \dot{y}(t) = y(t) \exp [\zeta x(t)y(t)], & y(0) = \cos \zeta. \end{cases}$$

3. Розв'язати асимптотично в головному і наступному наближеннях за малим параметром ε систему $\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y^2(t), & x(0) = 1, \\ \varepsilon \dot{y}(t) = 1 - x(t)y(t), & y(0) = -1. \end{cases}$

4. Розв'язати методом Ван-дер-Поля при $\mu \ll 1$ рівняння коливань

$$y''(x) - \mu(y'^4(x) + y^3(x)) + y(x) = 0.$$

5. Знайти наступну поправку до головного значення $\omega_0 = 1$ частоти ангармонічних коливань $x(t) = a \cos(\omega t + \phi)$, описаних рівнянням

$$\ddot{x} + [x^2(t)\dot{x}^2(t) + 1]x(t) = 0, \text{ при } |a| \ll 1.$$

6. Розв'язати при $|x| \ll 1$ і $|x| \gg 1$ асимптотично диференціальне рівняння $y'(x) + xy^3(x) = x^3$, $y(0) = 0$. Виходячи з отриманих результатів, побудувати графіки його можливих розв'язків.

7. Побудувати фазовий портрет системи $\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) - y(t) + y^2(t), \\ \dot{y}(t) = x(t). \end{cases}$

Варіант 10

1. Розв'язати точно і асимптотично в головному і наступному наближеннях за малим параметром γ диференціальне рівняння

$$\dot{x}(t) \ln t + \frac{z}{x} = \frac{1}{3} \left(\frac{x + \gamma}{z} \right)^2.$$

Порівняти результати, розкладаючи точний розв'язок за малим параметром.

2. Розв'язати асимптотично в головному і наступному наближеннях за малим параметром ζ систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + e^{\zeta x(t)y(t)}, & x(0) = -e^{-\zeta}, \\ \dot{y}(t) = x^3(t), & y(0) = 1. \end{cases}$$

3. Розв'язати асимптотично в головному і наступному наближеннях за малим параметром ε систему
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) - y^2(t), & x(0) = 2, \\ \varepsilon \dot{y}(t) = 1 - y(t)/x^2(t), & y(0) = 1. \end{cases}$$

4. Розв'язати методом Ван-дер-Поля при $\mu \ll 1$ рівняння коливань

$$y''(x) - \mu y^3(x)(1 + y'(x)) + y(x) = 0.$$

5. Знайти наступну поправку до головного значення $\omega_0 = 1$ частоти ангармонічних коливань $x(t) = a \cos(\omega t + \phi)$, описаних рівнянням

$$\ddot{x} + x(t) = -x(t)\dot{x}^4(t), \text{ при } |a| \ll 1.$$

6. Розв'язати при $|x| \ll 1$ і $|x| \gg 1$ асимптотично диференціальне рівняння $y'(x) + x^3 y^3(x) = x$, $y(0) = 0$. Виходячи з отриманих результатів, побудувати графіки його можливих розв'язків.

7. Побудувати фазовий портрет рівняння

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) - x^2(t) = 0.$$

Розділ 3

Наближене обчислення інтегралів

3.1. Загальні методи обчислення інтегралів

Метод малого параметра. В більшості «регулярних» випадків інтеграл, що залежить від малого параметра ε , може бути обчислений прямим розкладанням у ряд Тейлора (1.1). Зокрема якщо $a(\varepsilon)$, $b(\varepsilon)$ і $f(x, \varepsilon)$ — достатньо диференційовні та інтегровні функції, то

$$\int_{a(\varepsilon)}^{b(\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx \equiv I(\varepsilon) = I(0) + \varepsilon I'(0) + \frac{\varepsilon^2 I''(0)}{2} + \dots, \quad (3.1)$$

$$I(0) = \int_{a_0}^{b_0} f_0(x) dx, \quad I'(0) = f_0(b_0) b'(0) - f_0(a_0) a'(0) + \int_{a_0}^{b_0} f'_\varepsilon(x, 0) dx, \quad (3.2)$$

де $a_0 = a(0)$, $b_0 = b(0)$ і $f_0(x) = f(x, 0)$.

Зауваження: В деяких випадках зручно зробити заміну змінної інтегрування так, щоб перенести залежність від ε повністю до підінтегральної функції. Наприклад, заміна: $y = [x - a(\varepsilon)] / [b(\varepsilon) - a(\varepsilon)]$ перетворює інтеграл (3.1) таким чином:

$$I(\varepsilon) = \int_0^1 g(y, \varepsilon) dy, \quad g(y, \varepsilon) = [b(\varepsilon) - a(\varepsilon)] f([b(\varepsilon) - a(\varepsilon)]y + a(\varepsilon), \varepsilon). \quad (3.3)$$

Метод виділення основного внеску. Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — знакопостійні інтегровні функції, а x_0 — точка максимуму $f(x)$, причому $|f(x) - g(x)| \ll |f(x_0)|$ для всіх $a < x < b$. Тоді інтеграл функції $f(x)$ може бути приблизно

замінений відповідним інтегралом функції $g(x)$.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx + R, \quad |R| \leq \int_a^b |f(x) - g(x)|dx \ll \left| \int_a^b f(x)dx \right|.$$

Зауваження 1: Запропонований метод носить виключно оцінювальний характер, для конкретних функцій потрібно проводити ретельну оцінку залишкового члена. Зокрема метод може давати некоректну відповідь при a або b рівних $\pm\infty$.

Зауваження 2: Частковий, але строго математично обґрунтований випадок методу виділення основного внеску являє собою метод Лапласа, який буде розглянутий у підрозділі 3.4.

Приклади завдань з розв'язками до підрозділу 3.1

3.1.1. У головному і наступному наближеннях по $\varepsilon \ll 1$ обчислити інтеграли

$$(a) \int_{\varepsilon}^1 e^{-\varepsilon x^2} \sin x dx; \quad (б) \int_0^{\varepsilon} \sqrt{x^2 + \varepsilon} \sin x^3 dx.$$

Розв'язок задачі 3.1.1а. Скористаємося формулами (3.1) за умови, що $a(\varepsilon) = \varepsilon$, $b(\varepsilon) = 1$, $f(x, \varepsilon) = e^{-\varepsilon x^2} \sin x$:

$$I(\varepsilon) \approx \int_0^1 \sin x dx - \varepsilon \int_0^1 x^2 \sin x dx = 1 - \cos 1 + \varepsilon(2 - \cos 1 - 2 \sin 1).$$

Розв'язок задачі 3.1.1б. Пряме використання формул (3.1) неможливе, оскільки в інтегралі наявний квадратний корінь. Але ми можемо зробити заміну в інтегралі, $y = x/\varepsilon$, як запропоновано у (3.3):

$$I(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} \sqrt{x^2 + \varepsilon} \sin x^3 dx = \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \int_0^1 \sqrt{\varepsilon y^2 + 1} \sin(\varepsilon^3 y^3) dy,$$

після чого в отриманому інтегралі можна використовувати розкладання за формулою Тейлора, утримуючи головне і наступне ненульове наближення, причому розкласти тепер потрібно лише підінтегральну функцію:

$$I(\varepsilon) \approx \varepsilon^4 \sqrt{\varepsilon} \int_0^1 (y^3 + \varepsilon y^5/2) dy = \varepsilon^4 \sqrt{\varepsilon} (1/4 + \varepsilon/12).$$

3.1.2. Обчислити інтеграл $\int_1^{10} x^x dx$ з похибкою менше ніж 2%.

Розв'язок задачі 3.1.2. Очевидно, що основний внесок в інтеграл роблять значення $f(x) = x^x$ поблизу $x = 10$. Тоді для зручності введемо $y = 10 - x$ і визначимо нову функцію $g(y)$, яка наближує підінтегральну функцію, в припущенні $y \ll 1$ наступним чином:

$$f(x) = x^x = (10 - y)^{10-y} = e^{(10-y)\ln(10-y)} \approx e^{10\ln 10 - (1+\ln 10)y} = g(y).$$

Цю функцію ми і будемо вважати наближенням для даної:

$$\int_1^{10} x^x dx \approx \int_0^{\infty} e^{10\ln 10 - (1+\ln 10)y} dy = \frac{10^{10}}{1 + \ln 10}.$$

Тут ми замінили верхню межу $9 = 10 - 1$ в інтегралі по y на ∞ , оскільки інтеграл від 9 до ∞ малий. Оцінимо похибку обчислення. Для цього запишемо наступний член розкладання по $y \ll 1$:

$$e^{(10-y)\ln(10-y)} \approx e^{10\ln 10 - (1+\ln 10)y} e^{-y^2/20} \approx e^{10\ln 10 - (1+\ln 10)y} (1 - y^2/20).$$

Тоді можна оцінити похибку обчислення:

$$R = \int_1^{10} x^x dx - \frac{10^{10}}{1 + \ln 10} \approx -\frac{10^9}{2} \int_0^{\infty} y^2 e^{-(1+\ln 10)y} dy = \frac{10^9}{(1 + \ln 10)^3}.$$

Отже, відносна похибка дорівнює $10^{-1}(1 + \ln 10)^{-2} \approx 0.9\%$.

3.1.3. Обчислити середнє значення $\cos^{100} x$ на його періоді з похибкою менше ніж 5%.

Розв'язок задачі 3.1.3. Період функції $\cos^{100} x$ дорівнює π , тому будемо усереднювати функцію у межах від $-\pi/2$ до $\pi/2$. Очевидно, що значення функції дорівнює 1 при $x = 0$ і швидко зменшується при віддаленні від цієї точки. Тому спробуємо наблизити дану функцію іншою, близькою до неї при $|x| \ll 1$. Оскільки $\cos x \approx 1 - x^2/2 + x^4/24$, а $e^{-x^2/2} \approx 1 - x^2/2 + x^4/8$, то функція e^{-50x^2} може слугувати гарним наближенням для даної функції:

$$\langle \cos^{100} x \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{100} x dx \approx \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-50x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{50\pi}}.$$

При переході до інтеграла від e^{-50x^2} межі інтегрування були замінені на $\pm\infty$, оскільки цей інтеграл поза відрізком від $-\pi/2$ до $\pi/2$ малий. Оцінимо похибку обчислень. Для цього оцінимо, наскільки обрана нами функція сильно відрізняється від даної. Оскільки істотні значення набираються при малих

значеннях x , то запишемо: $\cos^{100} x \approx (e^{-x^2/2} - x^4/12)^{100} \approx e^{-50x^2} (1 - 25x^4/3)$. Тоді можна оцінити похибку обчислення:

$$\langle \cos^{100} x \rangle - \frac{1}{\sqrt{50\pi}} \approx -\frac{25}{3\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-50x^2} dx = -\frac{1}{2000\sqrt{2\pi}}.$$

Отже, відносна похибка обчислення 0.25%.

Завдання для самостійної роботи до підрозділу 3.1

3.1.4. Довести співвідношення (3.2) і вивести $I''(0)$.

3.1.5. У головному і наступному наближеннях по $\varepsilon \ll 1$ обчислити інтеграли

$$(a) \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} e^x \operatorname{tg} \varepsilon x^3 dx; \quad (б) \int_0^{\varepsilon} \frac{dx}{\sin x^2 + \varepsilon}; \quad (в) \int_0^{\varepsilon} x^x dx.$$

3.1.6. Обчислити з похибкою менше ніж 5%:

$$(a) e^{-2^{2n}} \int_1^4 e^{x^n} dx, \quad n > 2; \quad (б) \int_{-\infty}^{\infty} (x^4 + 4x + 4)^{-100} dx.$$

Вказівка до задачі 3.1.6б. Знайдіть точку максимуму функції і наблизьте її поблизу цієї точки функцією виду $\exp(-ay^2)$.

3.2. Інтегрування частинами. Інтегралі Фур'є

Метод інтегрування частинами може бути використаний не тільки як точний метод, але також як наближений. Для цього потрібно представити підінтегральну функцію у вигляді добутку двох функцій $u(x)$ та $v'(x)$ таким чином, щоб в результаті інтегрування частинами,

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx, \quad (3.4)$$

перший доданок виявився набагато більшим, ніж другий. У цьому випадку перший доданок являтиме собою головне значення інтеграла, а другий — залишковий член. Далі, за необхідністю, цю процедуру треба повторити певну кількість разів, обчислюючи наступні наближення.

Використовуючи метод інтегрування частинами, можна наближено обчислювати *інтеграли Фур'є*. А саме, якщо функція $f(x)$ достатньо диференційована, то

$$\int_a^b f(x)e^{ikx} dx = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{i^{n+1}}{k^{n+1}} [f^{(n)}(a)e^{ika} - f^{(n)}(b)e^{ikb}] + o(k^{-N}), \quad k \rightarrow \infty, \quad (3.5)$$

де під $f^{(n)}(x)$ мається на увазі n -та похідна функції $f(x)$.

Приклади завдань з розв'язками до підрозділу 3.2

3.2.1. Обчислити розкладання при $x \gg 1$ функції помилок $\text{Erf}(x) = \int_x^\infty e^{-t^2} dt$. Обчислити $\text{Erf}(2)$ з точністю 5%.

Розв'язок задачі 3.2.1. Для обчислення цієї асимптотики скористаємося інтегруванням частинами (3.4) стільки разів, скільки необхідно:

$$\text{Erf}(x) = \int_x^\infty \frac{de^{-t^2}}{2t} = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{4x^3} + R(x).$$

Перші доданки — члени розкладання, а останній інтеграл $R(x)$ — похибка обчислень. Оцінимо його:

$$|R(x)| = \frac{3}{8} \left| \int_x^\infty \frac{de^{-t^2}}{t^5} \right| \leq \frac{3}{8x^5} \int_x^\infty de^{-t^2} = \frac{3e^{-x^2}}{8x^5}.$$

Таким чином, зазначених членів розкладання достатньо для обчислення $\text{Erf}(2) \approx 7e^{-4}/32 \pm 5\%$.

3.2.2. Обчислити головні і наступні члени розкладання інтеграла Стілтєса

$$S(x) = \int_0^\infty e^{-t} \frac{dt}{x+t} \quad \text{при } 0 < x \ll 1 \text{ та } x \gg 1.$$

Розв'язок задачі 3.2.2. Звернемо увагу, що для обох зазначених асимптотик, $x \ll 1$ і $x \gg 1$, ми можемо використовувати інтегрування частинами (3.4), але вибір функцій u і v для цих випадків повинен бути різним.

Для випадку $x \gg 1$ маємо:

$$S(x) = - \int_0^\infty \frac{de^{-t}}{x+t} = - \frac{e^{-t}}{x+t} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{de^{-t}}{(x+t)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + R(x).$$

Знайдений результат являє собою головне та наступне наближення, що показує наступна оцінка:

$$|R(x)| = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} dt}{(x+t)^3} \leq \frac{2}{x^3} \ll \frac{1}{x^2}.$$

Для другого випадку $x \ll 1$ маємо:

$$S(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} d \ln(x+t) = e^{-t} \ln(x+t) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t} \ln(x+t) dt.$$

Зауважимо, що другий доданок має скінченну границю при $x \ll 1$,

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \ln t dt = -\gamma \approx -0.577216,$$

тому перед наступним інтегруванням частинами треба значення цієї границі виділити в явному вигляді:

$$S(x) = -\ln x - \gamma + \int_0^{\infty} e^{-t} [\ln(t+x) - \ln t] dt.$$

З точки зору чистої математики, знайдена асимптотика $-\ln x - \gamma$ представляє як раз головне та наступне наближення. Але в теоретичній фізиці логарифм малого або великого параметра вважається числом порядку 1. Тому продовжимо розрахунки та проінтегруємо частинами, вважаючи, що $u(t) = e^{-t}$ та $v'(t) = \ln(t+x) - \ln t$:

$$\begin{aligned} S(x) &= -\ln x - \gamma + e^{-t} [(t+x) \ln(t+x) - t \ln t] \Big|_0^{\infty} + \\ &+ \int_0^{\infty} e^{-t} [(t+x) \ln(t+x) - t \ln t] dt = \\ &= -\ln x - \gamma - x \left[\ln x - \int_0^{\infty} e^{-t} (1 + \ln t) dt \right] + R(x) = \\ &= -\ln x - \gamma - x [\ln x + \gamma - 1] + R(x). \end{aligned}$$

Отримана асимптотика являє собою головне і наступне наближення (вважаючи $\ln x \sim 1$), оскільки

$$R(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} [(t+x) \ln(t+x) - t \ln t - x(1 + \ln t)] dt = O(x^2 \ln x),$$

що можна перевірити ще одним інтегруванням частинами.

3.2.3. Показати за допомогою інтегрування частинами, що

$$\int_0^{\infty} f(x) \cos kx \, dx = -\frac{f'(0)}{k^2} + O(k^{-4}), \quad k \rightarrow \infty,$$

якщо функція $f(x)$ достатньо диференційована і $x^3 f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Розв'язок задачі 3.2.3. Скористаємось інтегруванням частинами (3.4):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(x) \cos kx \, dx &= \frac{f(x) \sin kx}{k} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{f'(x) \sin kx}{k} \, dx = \\ &= -\frac{f'(0)}{k^2} - \int_0^{\infty} \frac{f''(x) \cos kx}{k^2} \, dx = -\frac{f'(0)}{k^2} + \int_0^{\infty} \frac{f'''(x) \sin kx}{k^3} \, dx. \end{aligned}$$

Нескладно пересвідчитися, що останній доданок порядку $O(k^{-4})$.

Завдання для самостійної роботи до підрозділу 3.2

3.2.4. Довести співвідношення (3.5), використовуючи інтегрування частинами.

Вказівка до задачі 3.2.4. Обирайте наступний вигляд функцій $u(x) = f^{(n)}(x)$ та $v'(x) = e^{ikx}$ та інтегруйте частинами N разів.

3.2.5. Обчислити розкладання при $x \gg 1$ інтегралів Френеля

$$F_1(x) = \int_x^{\infty} \cos(\theta^2) \, d\theta, \quad F_2(x) = \int_x^{\infty} \sin(\theta^2) \, d\theta.$$

3.2.6. Обчислити розкладання при $x \gg 1$ неповної гамма-функції $\Gamma(a, x) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{a-1} \, dt$. Обчислити $\Gamma(1/5, 5)$ з точністю 5%.

3.2.7. (!) Обчислити головне значення $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx} \, dx}{\sqrt{1 + |x|^N}}$ при $k \gg 1$:

(а) $N = 2n, n \in \mathbb{N}$;

(б) $N = 2n - 1, n \in \mathbb{N}$.

Вказівка до задачі 3.2.7а. Використовуйте формулу (3.5) для наближеного значення інтегралів Фур'є, розкладаючи інтеграл на два: від $-\infty$ до 0 та від 0 до ∞ .

Вказівка до задачі 3.2.76. Перейдіть від інтеграла від 0 до $+\infty$ до інтеграла по комплексній траєкторії від $\sqrt[n]{i}$ до $\sqrt[n]{i} \cdot \infty$ (розріз від точки розгалуження $\sqrt[n]{i}$). Інтеграли вздовж інших розрізів виявляються нехтовно малими у порівнянні із зазначеним.

3.3. Метод стаціонарної фази

Метод стаціонарної фази. Нехай дійсно-значна функція $f(x)$ і комплексно-значна функція $\phi(x)$ достатньо диференційовані, $x = a$ — єдина стаціонарна точка $f(x)$ на інтервалі $a \leq x \leq b$, тобто $f'(a) = 0$ та $f'(x) \neq 0$ при $a < x \leq b$, а також $\phi(a) \neq 0$ та $f''(a) \neq 0$. Тоді правильна наступна асимптотика:

$$\int_a^b \phi(x) e^{ikf(x)} dx = \sqrt{\frac{\pi i}{2kf''(a)}} \phi(a) e^{ikf(a)} + O(k^{-1}), \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.6)$$

Тут алгебраїчний квадратний корінь комплексного числа розраховується таким чином, щоб його дійсна частина була позитивна.

Точка a , у якій $f'(a) = 0$, називається *точкою стаціонарної фази*, оскільки у цій точці «зупиняється» фаза функції $e^{ikf(x)}$, що і зумовлює назву методу.

Детальне математичне доведення асимптотики (3.6) можна знайти в [4]. Тут ми, опускаючи деякі математичні деталі, простежимо основні моменти доведення. Для визначеності будемо вважати, що $f(a)$ — мінімальне значення на інтервалі інтегрування. Проведемо у інтегралі (3.6) заміну змінних $u = \sqrt{f(x) - f(a)}$:

$$\int_a^b \phi(x) e^{ikf(x)} dx = \int_0^c \varphi(u) e^{iku^2 + ikf(a)} du, \quad \varphi(u) = \phi(x) \frac{dx}{du} \Big|_{f(x)-f(a)=u^2},$$

тут $c = \sqrt{f(b) - f(a)}$. Зазначимо, що функція e^{iku^2} швидко осцилює за рахунок великого параметра k всюди, окрім околу $u = 0$. Тому слід очікувати, що основний внесок в інтеграл буде давати тільки окіл $u = 0$. Беручи до уваги, що $f'(a) = 0$, поблизу $x = a$ маємо:

$$f(x) - f(a) = \frac{\xi^2 f''(a)}{2} + \frac{\xi^3 f'''(a)}{6} + \dots, \quad \xi = x - a,$$

$$f'(x) = \xi f''(a) + \frac{\xi^2 f'''(a)}{2} + \dots, \quad \phi(x) = \phi(a) + \xi \phi'(a) + \dots$$

Тоді розкладемо функцію $\varphi(u)$ поблизу $u = 0$:

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \frac{2\phi(x)\sqrt{f(x) - f(a)}}{f'(x)} \Big|_{f(x)-f(a)=u^2} = \phi(a)\sqrt{\frac{2}{f''(a)}} + Au + \dots, \\ A &= \frac{6\phi'(a)f''(a) - 2\phi(a)f'''(a)}{[f''(a)]^2}.\end{aligned}\quad (3.7)$$

Тепер ми можемо обчислити початковий інтеграл, представивши його у вигляді:

$$\begin{aligned}\int_a^b \phi(x)e^{ikf(x)} dx &= e^{ikf(a)}\phi(a)\sqrt{\frac{2}{f''(a)}} \int_0^\infty e^{iku^2} du + R, \\ R &= O\left(\int_c^\infty e^{iku^2} du\right) + O\left(\int_0^c ue^{iku^2} du\right).\end{aligned}\quad (3.8)$$

Для обчислення інтеграла у рівнянні (3.8) робимо заміну $ku^2 = iz^2$ і приходимо до інтеграла Пуассона:

$$\int_0^\infty e^{iku^2} du = \sqrt{\frac{i}{k}} \int_0^{\sqrt{-i}\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\frac{i}{k}} \int_0^\infty e^{-z^2} dz = \sqrt{\frac{i\pi}{k}}.$$

Зазначимо, що інтегрування у другому інтегралі проходить по прямій від 0 до $\sqrt{-i}\infty$ у комплексній площині. Для переходу до класичного інтеграла Пуассона по дійсній прямій від 0 до $+\infty$ (третій інтеграл) треба розглянути замкнений контур інтегрування, що складається з відрізків завдовжки r двох вказаних прямих від нуля і дуги кола радіуса r . Інтеграл по цьому контуру дорівнює нулю в силу теореми Коші, а інтеграл по дузі прямує до нуля при $r \rightarrow \infty$.

Звернемось тепер до залишкового члена R . Він складається з двох доданків. Перший доданок виник від заміни у головному наближенні верхньої границі інтегрування з c на ∞ , а другий позначає розкладання підінтегральної функції $\varphi(u)$ до наступного наближення, див. (3.7). Кожний з них можна оцінити як $O(k^{-1})$, див. [4], що доводить асимптотику (3.6).

Зауваження 1: Якщо у вказаному методі перші $(N - 1)$ похідних у точці $x = a$ дорівнюють нулю, $f^{(n)}(a) = 0$ при $n = 1, 2, \dots, (N - 1)$, і лише $f^{(N)}(a) \neq 0$, то досліджуваний інтеграл має порядок $O(k^{-1/N})$. Зокрема при $N = 3$ можемо записати:

$$\int_a^b \phi(x)e^{ikf(x)} dx = \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \sqrt[3]{\frac{6i}{kf'''(a)}} \phi(a)e^{ikf(a)} + O(k^{-2/3}), \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

Зауваження 2: Якщо на інтервалі інтегрування функція $f(x)$ не має стаціонарних точок, то, використовуючи метод інтегрування частинами, порівняйте з (3.5), можна показати, що правильна наступна асимптотика:

$$\int_a^b \phi(x)e^{ikf(x)} dx = \frac{\phi(b)e^{ikf(b)}}{ikf'(b)} - \frac{\phi(a)e^{ikf(a)}}{ikf'(a)} + O(k^{-2}), \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.10)$$

Приклади завдань з розв'язками до підрозділу 3.3

3.3.1. Обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_1^{\infty} e^{ik(x^2-2x)} \frac{dx}{\sqrt{x}} \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Розв'язок задачі 3.3.1. Визначимо точку стаціонарної фази: $f'(x) = 2x - 2 = 0$. Отже, $x_0 = 1$ і збігається з початком інтервалу інтегрування в умові задачі. Skorистаємося рівністю (3.6) і отримаємо, що головне наближення інтеграла дорівнює $e^{-ik} \sqrt{\pi i / 4k}$.

3.3.2. Обчислити $\int_{-\infty}^{\infty} \cos [100(x^4 - x)] dx$ з точністю 10%.

Розв'язок задачі 3.3.2. У першу чергу зауважимо, що підінтегральний вираз дорівнює $\operatorname{Re}[e^{100i(x^4-x)}]$. Точка стаціонарної фази у цьому випадку $a = 2^{-2/3}$. Оскільки інтегрування ведеться по всій дійсній осі, ми представимо даний інтеграл у вигляді суми інтегралів від $-\infty$ до a та від a до $+\infty$. Для кожного з інтегралів можна застосувати рівність (3.6) при $k = 100$. У результаті маємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos [100(x^4 - x)] dx = \operatorname{Re} \left[e^{-75 \cdot 2^{-2/3} i} \left(\frac{2^{1/3} \pi i}{300} \right)^{1/2} + R \right].$$

Враховуючи, що $\sqrt{i} = e^{i\pi/4}$, остаточно отримуємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos [100(x^4 - x)] dx \approx \left(\frac{2^{1/3} \pi}{300} \right)^{1/2} \cos (75 \cdot 2^{-2/3} - \pi/4) \approx -0.0905835.$$

Оцінимо похибку обчислень R . Для цього звернемося до виразу (3.7) та визначимо, що $A = -2 \cdot 24a / (12a)^2 = -2^{2/3} / 3$. Тоді оцінимо похибку $|R|$ як

наступний член розкладання:

$$|R| \approx \left| \operatorname{Re} \left(2A \lim_{\gamma \rightarrow 0} \int_0^{\infty} u e^{iku^2 - \gamma u^2} du \right) \right| = 2|A| \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{2(k - i\gamma)} = \frac{|A|}{k} = \frac{2^{2/3}}{300}.$$

Отже, відносна похибка обчислень менше 10%.

Зауваження: При обчисленні R ми використали так званий метод регуляризації, коли до формально розбіжного на $+\infty$ інтеграла вводиться множник $\exp(-\gamma u^2)$, який робить інтеграл збіжним, а після обчислення знаходять границю $\gamma \rightarrow 0$.

Завдання для самостійної роботи до підрозділу 3.3

3.3.3. Отримати головні члени асимптотик (3.9) та (3.10) із зауважень 1 та 2.

Вказівка до задачі 3.3.3. У першій асимптотиці (3.9) дійте аналогічно доведенню (3.6), проводячи в інтегралі заміну $u = \sqrt[3]{f(x) - f(a)}$ і враховуючи, що $f'(a) = f''(a) = 0$, розкладіть підінтегральну функцію (окрім e^{iku^3}) у ряд поблизу $u = 0$ ($x = a$). У другій асимптотиці (3.10) використовуйте інтегрування частинами.

3.3.4. Обчислити головні наближення інтегралів:

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad & \int_0^1 \sin [k(2x^3 - x^2)] dx; & \text{(б)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \cos (kx^2 - 2x + 1) dx; \\ & & \text{(в)} \quad & \int_0^{\infty} e^{ik[x - 3x^2(1-x)]} dx; \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Вказівка до задачі 3.3.4. Представте \cos або \sin у вигляді дійсної або уявної частини, що відповідає \exp .

3.3.5. Обчислити $\int_0^{\infty} x^{100i} \sin(50x) dx$ з точністю 10%.

Вказівка до задачі 3.3.5. Представте підінтегральний вираз при $k = 50$ у вигляді $(e^{ik(2 \ln x + x)} - e^{ik(2 \ln x - x)})/2i$. Перша експонента не дає внеску у головне наближення, оскільки не має точок стаціонарної фази в області інтегрування, але дає внесок у залишковий член, тобто в оцінку похибки.

3.4. Метод Лапласа. Поняття про метод перевалу

Метод Лапласа. Нехай дійсно-значні функції $f(x)$ та $\phi(x)$ достатньо диференційовані і функція $f(x)$ має у точці a локальний максимум, причому $f'(a) = 0$, $f''(a) < 0$ і $f(x) < f(a)$ при $a < x \leq b$, тоді при $p \rightarrow +\infty$ правильно, що

$$\int_a^b \phi(x) e^{pf(x)} dx = e^{pf(a)} \left[\phi(a) \sqrt{\frac{\pi}{2p|f''(a)|}} + O(p^{-1}) \right]. \quad (3.11)$$

Доведення асимптотики (3.11) аналогічне доведенню асимптотики (3.6), тому зупинимось лише на відмінностях. Проведемо заміну змінних $u = \sqrt{f(a) - f(x)}$:

$$\int_a^b \phi(x) e^{pf(x)} dx = \int_0^c \varphi(u) e^{pf(a) - pu^2} du, \quad \varphi(u) = \phi(x) \frac{dx}{du} \Big|_{f(a) - f(x) = u^2},$$

тут $c = \sqrt{f(a) - f(b)}$. Очевидно, що за рахунок множника e^{-pu^2} основний внесок у інтеграл дають значення u , близькі до 0. Розкладемо $\varphi(u)$ поблизу $u = 0$: $\varphi(u) = \phi(a) \sqrt{2/|f''(a)|} + Au + \dots$, де A визначено співвідношенням (3.7). Перший доданок визначає головний член у рівності (3.11), наступні дозволяють оцінити похибку обчислень.

Зауваження: Якщо на відрізку від a до b функція $f(x)$ має у точці a максимум, але $f'(a) < 0$, то

$$\int_a^b \phi(x) e^{pf(x)} dx = \frac{\phi(a) e^{pf(a)}}{p|f'(a)|} + O(p^{-2}), \quad p \rightarrow +\infty. \quad (3.12)$$

Метод перевалу. Розглянемо інтеграл вигляду

$$I(p) = \int_{\gamma} \phi(z) e^{pf(z)} dz, \quad \text{при } p \rightarrow \infty, \quad (3.13)$$

де $f(z)$ і $\phi(z)$ — комплексно-значні функції, аналітичні у деякій області комплексної площини, що містить криву інтегрування γ . Такий інтеграл може бути обчислений асимптотично, використовуючи *метод перевалу*, сутність якого може бути викладена наступним чином:

- Визначимо точки *перевалу*, в яких $f'(z) = 0$. Зауважимо, що назва «перевал» походить з географічної термінології. Якщо розглянути функцію двох

змінних $\psi(x, y) = |\phi(x + iy)e^{pf(x+iy)}|$, то точки, де $f'(z) = 0$, є сідловими для $\psi(x, y)$ при великих значеннях p . Якщо розглядати $\psi(x, y)$ як функцію географічної висоти над рівнем моря в точці (x, y) , то сідлова точки — і є так званою точкою перевалу.

- Побудуємо новий контур інтегрування γ' так, щоб його початок і кінець збігався з початком і кінцем γ , але проходив певним чином через деякі з точок *перевалу*. Напрямок, у якому γ' буде проходити через точку перевалу, може бути обрано неоднозначно. Наприклад, в основі методу найшвидшого спуску потрібно, щоб швидкість спадання функції $|\phi(z)e^{pf(z)}|$ при віддаленні від точки перевалу вздовж γ' була максимально можливою.

- Перейти від γ до γ' , використовуючи теорему Коші. Якщо в області, обмеженій кривими γ і γ' , функції $\phi(x)$ та $f(x)$ аналітичні, то інтеграл по замкнутому контуру $\gamma \cup \gamma'$ дорівнює нулю. Якщо в цій області є полюси, то потрібно розраховувати лишок.

- Обчислити асимптотично інтеграл по γ' , спираючись на метод Лапласа. Головний внесок в інтеграл мають значення змінної поблизу точок *перевалу*, оскільки в них досягається локальний максимум підінтегральної функції.

Зауваження: Тут представлена лише загальна ідея методу перевалу, більш докладний його виклад з прикладами є у багатьох підручниках і монографіях, зокрема [1, 4, 5, 6]. Основні і найчастіше значні труднощі пов'язані з пошуком нової кривої інтегрування γ' . Існує ряд модифікацій методу перевалу, які пропонують алгоритм ефективного пошуку γ' . Серед інших варто відзначити метод Ван-дер-Вардена, докладний виклад якого можна знайти у [7].

Приклади завдань з розв'язками до підрозділу 3.4

3.4.1. Обчислити асимптотику для функцій Бесселя

$$I_n(p) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{p \cos x} \cos nx dx \quad \text{при } n \in \mathbb{N} \text{ та } p \rightarrow +\infty.$$

Розв'язок задачі 3.4.1. На відрізку від 0 до π функція $\cos x$ у показнику експоненти спадає і, таким чином, має максимум у точці $x = 0$. Отже, можна скористатися рівністю (3.11):

$$I_n(p) = \frac{1}{\pi} e^p \sqrt{\frac{\pi}{2p}} + O(p^{-1}e^p) = \frac{e^p}{\sqrt{2\pi p}} + O(p^{-1}e^p), \quad p \rightarrow +\infty.$$

3.4.2. Довести асимптотичну формулу Стірлінґа

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^p dx \approx \sqrt{2\pi p} p^p e^{-p} \text{ при } p \rightarrow +\infty.$$

Розв'язок задачі 3.4.2. Безпосередньо метод Лапласа застосувати не вдається, оскільки функція x^p не має максимуму на інтервалі інтегрування. Але, провівши заміну змінних $x = pt$, отримуємо інтеграл, у якому максимум підінтегральної функції досягається у точці $x = 1$. Після цього можна застосувати метод Лапласа (3.11), розбиваючи проміжок інтегрування на два, від 0 до 1 та від 1 до ∞ :

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^p dx = p^{p+1} \int_0^{\infty} e^{p(\ln t - t)} dt \approx 2p^{p+1} e^{-p} \sqrt{\frac{\pi}{2p}},$$

що і доводить асимптотичну формулу Стірлінґа.

3.4.3. Обчислити головне значення інтеграла

$$I(p) = \int_0^{\infty} e^{p(x+ix-x^3)} dx \text{ при } p \rightarrow +\infty.$$

Розв'язок задачі 3.4.3. Для обчислення інтеграла будемо використовувати метод перевалу. У даному випадку, $f(z) = z + iz - z^3$, $\phi(z) = 1$, що узгоджується з інтегралом (3.13), і крива γ — це промінь від 0 до $+\infty$ вздовж дійсної осі.

Визначимо точки перевалу: $f'(z) = 1 + i - 3z^2 = 0$. Маємо дві точки перевалу: $z = \pm \sqrt{(1+i)/3}$. Оберемо новий шлях інтегрування γ' у вигляді променя від 0 до $\infty \cdot e^{i\pi/8}$. Цей промінь проходить через одну з точок перевалу, а саме, $z_0 = (2/9)^{1/4} e^{i\pi/8}$, тобто променя, який йде під кутом $\pi/8$ до дійсної осі. Інтеграл по γ' дорівнює інтегралу по γ , оскільки у секторі кола радіусом R , сторони якого лежать на γ і γ' , немає особливих точок підінтегральної функції, а інтеграл по дузі цього сектора наближається до нуля при $R \rightarrow +\infty$.

Далі в інтегралі по γ' зробимо заміну змінних, $z = (y+1)z_0$, так, щоб після заміни інтегрування велося по дійсній осі і точка перевалу виявилася в $y = 0$:

$$I(p) = \int_0^{\infty \cdot e^{i\pi/8}} e^{p(z+iz-z^3)} dz = z_0 \int_{-1}^{\infty} e^{pz_0^3(2-3y^2-y^3)} dy.$$

Тут було враховано, що $(1+i)z_0 = 3z_0^3$. Подальші обчислення спираються на метод Лапласа. Абсолютна величина підінтегральної функції швидко спадає

(оскільки $p \rightarrow +\infty$) при віддаленні від $y = 0$, отже, для обчислення головного наближення ми можемо знехтувати у показнику експоненти доданком y^3 і продовжити область інтегрування до $-\infty$, після чого інтеграл зведеться до інтеграла Пуассона:

$$I(p) \approx z_0 e^{2pz_0^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3pz_0^3 y^2} dy = e^{2pz_0^3} \sqrt{\frac{\pi}{3pz_0}}, \quad z_0 = (2/9)^{1/4} e^{i\pi/8}.$$

Завдання для самостійної роботи до підрозділу 3.4

3.4.4. Обчислити при $p \rightarrow +\infty$ головне значення $\int_0^{\pi} x^p \sin x dx$.

3.4.5. Показати, що при $p \rightarrow +\infty$ мають місце такі асимптотичні розкладання:

$$(a) \int_0^1 e^x x^p (1+x^2)^{-p} dx \approx \sqrt{\frac{\pi}{2p}} \frac{e}{2^p};$$

$$(б) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-p(x^2+y^2)} (1-x-y)^p dx dy \approx \frac{1}{p^2} - \frac{7}{p^3}.$$

Вказівка до задачі 3.4.5б. Для функції $f(x, y) = -(x^2 + y^2) + \ln |1 - x - y|$ знайдіть екстремальні точки: всередині області інтегрування, коли $f'_x(x, y) = f'_y(x, y) = 0$ ($x_1 = y_1 = (1 + \sqrt{5})/4$); на межі області інтегрування, коли або $f'_x(x, 0) = 0$ ($x_2 = (1 + \sqrt{3})/2$, $y_2 = 0$), або $f'_y(0, y) = 0$ ($x_3 = 0$, $y_3 = (1 + \sqrt{3})/2$); і $x_4 = 0$, $y_4 = 0$. Виявляється, що саме околиця точки $x_4 = 0$, $y_4 = 0$ дає максимальний внесок у інтеграл.

3.4.6. Обчислити при $p \rightarrow +\infty$ головне значення

$$\int_0^{\infty} e^{px(6-x^3)} \sin [px^2(1+4x)] dx.$$

Вказівка до задачі 3.4.6. Представте \sin як уявну частину \exp . У результаті отримаєте інтеграл вигляду (3.13), де $f(z) = 6z + iz^2 + 4iz^3 - z^4$, $\phi(z) = 1$, крива інтегрування γ — дійсна піввісь від 0 до $+\infty$. Знайдіть точки перевалу: $z_1 = 3i$ та $z_{2,3} = \pm(i+1)/2$. Проведіть промінь γ' з 0 через $z_2 = (i+1)/2$ — це новий шлях інтегрування.

3.5. Приклади індивідуальних завдань до розділу 3

Варіант 1

1. Обчислити асимптотично в головному та наступному наближеннях за малим параметром ε інтеграл $\int_0^{\varepsilon} \sin(x^2) \ln(x + \varepsilon) dx$.

2. Обчислити з похибкою не більше 5% інтеграл $\int_0^3 \frac{x^2}{1 + e^{x^2-2}} dx$. Оцінити теоретично похибку обчислень.

3. Обчислити головне та наступне наближення інтеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} (2 + |x| \sin^{2n} x)^{-1} dx, \quad k \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}.$$

4. Методом стаціонарної фази обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{ikx^2}}{\sqrt{x}} \cos(kx^4) dx, \quad k \rightarrow +\infty.$$

5. Методом Лапласа обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_1^{\infty} e^{-(3x^2 - p - x^5)^2 + p^2} dx, \quad p \rightarrow +\infty.$$

6. Методом перевалу обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_{i-\infty}^{i+\infty} e^{-z^2} (1+z)^{-n} dz, \quad n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}.$$

Варіант 2

1. Обчислити асимптотично в головному та наступному наближеннях за малим параметром ε інтеграл $\int_{\varepsilon}^1 e^{-\varepsilon x^3} \sin(x + \varepsilon) dx$.

2. Обчислити з похибкою не більше 5% інтеграл $\int_2^6 \ln x^2 dx$. Оцінити теоретично похибку обчислень.

3. Обчислити головне та наступне наближення інтеграла

$$\int_x^\infty e^{-t^3} t^3 dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

4. Методом стаціонарної фази обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_0^\infty x^{-ik} e^{2ikx} dx, \quad k \rightarrow +\infty.$$

5. Методом Лапласа обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_0^\infty \sqrt{x} e^{px(1-x^2)} dx, \quad p \rightarrow +\infty.$$

6. Методом перевалу обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_{-i}^{+i\infty} e^z (z^3 - 3z - 2)^{-n} dz, \quad n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}.$$

Варіант 3

1. Обчислити асимптотично в головному та наступному наближеннях за малим параметром ε інтеграл $\int_{-\varepsilon}^1 \operatorname{sh}(-\varepsilon x^2) \cos(x - \varepsilon) dx$.

2. Обчислити з похибкою не більше 5% інтеграл $\int_0^3 x^4 e^{-x^2} dx$. Оцінити теоретично похибку обчислень.

3. Обчислити головне та наступне наближення інтеграла

$$\int_x^\infty e^{-t^2} \sqrt{t^2 + 1} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

4. Методом стаціонарної фази обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_{-1}^{\infty} e^{ik(x^4+4x)} dx, \quad k \rightarrow \infty.$$

5. Методом Лапласа обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_1^{\infty} e^{px^2(4-x^2)} \sin x dx, \quad p \rightarrow +\infty.$$

6. Методом перевалу обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwz} (4+z^2)^{-2w} dz, \quad w \rightarrow +\infty.$$

Варіант 4

1. Обчислити асимптотично в головному та наступному наближеннях за малим параметром ε інтеграл $\int_0^{\varepsilon} \frac{\text{sh}(x^2)}{x \sin(x + \varepsilon)} dx$.

2. Обчислити з похибкою не більше 5% інтеграл $\int_0^2 \cos^{20} [\arctg(x^4 - 4x + 3)] dx$. Оцінити теоретично похибку обчислень.

3. Обчислити головне та наступне наближення інтеграла

$$\int_0^{\infty} 10^{-x^n} k^{ix} dx, \quad k \rightarrow +\infty, n \in \mathbb{N}.$$

4. Методом стаціонарної фази обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_0^1 e^{ik \sin(x^3)} \cos(x^2) dx, \quad k \rightarrow \infty.$$

5. Методом Лапласа обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_2^{\infty} x^{-2} \ln^q x dx, \quad q \rightarrow +\infty.$$

6. Методом перевалу обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_{-\sqrt{i}\infty}^{+\sqrt{i}\infty} (z + e^{i\pi/4})^{-n} e^{2\sqrt{2}z - iz^2} dz, \quad n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}.$$

Варіант 5

1. Обчислити асимптотично в головному та наступному наближеннях за малим параметром ε інтеграл $\int_0^{1-\varepsilon} x^\varepsilon \ln(x + \varepsilon) dx$.

2. Обчислити з похибкою не більше 5% інтеграл $\int_3^5 x^{x \ln x} dx$. Оцінити теоретично похибку обчислень.

3. Обчислити головне та наступне наближення інтеграла

$$\int_x^\infty e^{-t^2} \sqrt{t^2 + 1} \ln t dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

4. Методом стаціонарної фази обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_0^\infty x^{-4ik} \sin(kx^2) dx, \quad k \rightarrow +\infty.$$

5. Методом Лапласа обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_1^\infty e^{p^2 - (3x^2 - p - x^5)^2} dx, \quad p \rightarrow +\infty.$$

6. Методом перевалу обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_{-1}^\infty (z^3 + 3z - 2i)^{-n} e^{iz} dz, \quad n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}.$$

Варіант 6

1. Обчислити асимптотично в головному та наступному наближеннях за малим параметром ε інтеграл $\int_0^\varepsilon \operatorname{ctg}(x\varepsilon) \ln(1 + x^2) dx$.

2. Обчислити з похибкою не більше 5% інтеграл $\int_2^6 x^2 e^{-x^4} dx$. Оцінити теоретично похибку обчислень.

3. Обчислити головне та наступне наближення інтеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} (|x|^{2n-1} + \cos^2 x^n)^{-1} dx, \quad k \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}.$$

4. Методом стаціонарної фази обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_0^{\infty} \sin(kx^2) e^{ikx^4} dx, \quad k \rightarrow +\infty.$$

5. Методом Лапласа обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_1^{\infty} x^{-3} \ln^p x dx, \quad p \rightarrow \infty.$$

6. Методом перевалу обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_{i-\infty}^{i+\infty} e^{irz} z^{-r} (z-2i)^{-r} dz, \quad r \rightarrow +\infty.$$

Варіант 7

1. Обчислити асимптотично в головному та наступному наближеннях за малим параметром ε інтеграл $\int_{\varepsilon}^1 \sin(x\varepsilon) \operatorname{tg}(x^2) dx$.

2. Обчислити з похибкою не більше 5% інтеграл $\int_4^9 2\sqrt{x^3} dx$. Оцінити теоретично похибку обчислень.

3. Обчислити головне та наступне наближення інтеграла

$$\int_x^{\infty} e^{-t^3} \ln t dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

4. Методом стаціонарної фази обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_{-1}^{\infty} e^{ik(x^4+x^3+x)} dx, \quad k \rightarrow \infty.$$

5. Методом Лапласа обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-px^2(4+x^2)} dx, \quad p \rightarrow \infty.$$

6. Методом перевалу обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itz} (1+z^2)^{-t} dz, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Варіант 8

1. Обчислити асимптотично в головному та наступному наближеннях за малим параметром ε інтеграл $\int_0^{\varepsilon} \frac{\ln \sqrt{x^2+1}}{e^{-\varepsilon x} - 1} dx$.

2. Обчислити з похибкою не більше 5% інтеграл $\int_0^2 \ln^{-30}(4-3x+3x^4) dx$.

Оцінити теоретично похибку обчислень.

3. Обчислити головне та наступне наближення інтеграла

$$\int_0^{\infty} e^{ikx-x^{2n-1}} dx, \quad k \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}.$$

4. Методом стаціонарної фази обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_0^{\infty} \sin(kx^2) \cos(kx^4) dx, \quad k \rightarrow +\infty.$$

5. Методом Лапласа обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_1^{\infty} x^{-2} \ln^p x dx, \quad p \rightarrow \infty.$$

6. Методом перевалу обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_{-(i+1)}^{-i+\infty} z^{-2m}(z+3i)^{-m}e^{i(z+2i)}dz, \quad m \rightarrow \infty, m \in \mathbb{N}.$$

Варіант 9

1. Обчислити асимптотично в головному та наступному наближеннях за малим параметром ε інтеграл $\int_{-1}^{\varepsilon} \frac{\sin(x\varepsilon)}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

2. Обчислити з похибкою не більше 5% інтеграл $\int_0^3 x^4 e^{-x^3} dx$. Оцінити теоретично похибку обчислень.

3. Обчислити головне та наступне наближення інтеграла

$$\int_x^{\infty} e^{-t^3} t^4 dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

4. Методом стаціонарної фази обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_{1/2}^{\infty} e^{ik(x^4+2x^3-2x)} dx, \quad k \rightarrow \infty.$$

5. Методом Лапласа обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_0^{\infty} e^{-px(x^2-4)} \cos x dx, \quad p \rightarrow \infty.$$

6. Методом перевалу обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_{i-1}^{i+\infty} (z^3 - 3iz^2 - 4i)^{-p} e^{i(z+1)} dz, \quad p \rightarrow \infty, p \in \mathbb{N}.$$

Варіант 10

1. Обчислити асимптотично в головному та наступному наближеннях за малим параметром ε інтеграл $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{\varepsilon+x^2}} dx$.

2. Обчислити з похибкою не більше 5% інтеграл $\int_2^5 10^{x^2} dx$. Оцінити теоретично похибку обчислень.

3. Обчислити головне та наступне наближення інтеграла

$$\int_1^{\infty} t^{-3} \sqrt{t^2 + x} \ln t dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

4. Методом стаціонарної фази обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_1^{\infty} e^{ik(x^4 - 3x^2)} dx, \quad k \rightarrow \infty.$$

5. Методом Лапласа обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_0^{\infty} \sqrt{1 + x^2} e^{-px^2 - 4x + 2p^2} dx, \quad p \rightarrow \infty.$$

6. Методом перевалу обчислити головне наближення інтеграла

$$\int_{-2i-\infty}^{-2i+\infty} (z^2 + 4iz - 3)^{-p} e^{ipz} dz, \quad p \rightarrow +\infty.$$

Відповіді

Розділ 1

1.1.1. $A_{1,0} = 1 \pm 0.5$, $A_{1,1} = 1.5 \pm 0.13$, $A_{1,2} = 1.375 \pm 0.063$,
 $A_{2,0} = 2 \pm 2$, $A_{2,1} = 1.5 \pm 0.22$, $A_{2,2} = 1.4375 \pm 0.096$.

1.1.2. $\sin 3 = 0.1411195 \pm 0.0004\%$.

1.1.3. $P_1/P_0 = (1.1 + e^{-2}) \pm 3\% = 1.24 \pm 3\%$.

1.1.4. $B_{1,0} = 2 \pm 0.5$, $B_{1,1} = 1.75 \pm 0.04$, $B_{1,2} = 1.734 \pm 0.007$,
 $B_{2,0} = 1.7 \pm 0.3$, $B_{2,1} = 1.73 \pm 0.02$, $B_{2,2} = 1.732 \pm 0.003$.

1.1.5. $\ln 3 = (12e - 9 - e^2)/2e^2 \pm 0.04\% = 1.0983 \pm 0.04\%$.

1.2.1. (а) $x \approx \varepsilon$. (б) $x \approx \varepsilon \pm \varepsilon^2\sqrt{2}$.

1.2.2. $x = 0.20 \pm 0.01$.

1.2.3. $x^{(0)} = 0$, $x^{(\pm n)} \approx \pm\pi(n + 1/2) \mp 1/(\pi n)$, $n = 1, 2, \dots$

1.2.4. $x_2 = -\frac{\partial_x^2 F(x_0, 0)[\partial_\varepsilon F(x_0, 0)]^2}{2[\partial_x F(x_0, 0)]^3} + \frac{\partial_x \partial_\varepsilon F(x_0, 0)\partial_\varepsilon F(x_0, 0)}{[\partial_x F(x_0, 0)]^2} - \frac{\partial_\varepsilon^2 F(x_0, 0)}{2\partial_x F(x_0, 0)}$.

1.2.5. (а) $x \approx \pi(1 - \varepsilon)/2$. (б) $x \approx 1 \pm \sqrt{2\varepsilon}$.

1.2.6. $x = 0.33 \pm 0.01$.

1.2.7. $x^{(0)} \approx \pi/4 - \pi^2/56$, $x^{(\pm n)} \approx \pm n\pi/2 + 2/(n\pi)^2$, $n = 1, 2, \dots$

1.3.1. (а) $y \approx \pi/2 + (x - 1)\varepsilon + \pi\varepsilon^2/2$. (б) $y = 1 \pm \sqrt{x^2 + 2\varepsilon^2}$.

1.3.2. (а) $x \approx y^{-1} - y^{-2} + 3y^{-3}/2$. (б) $x \approx \ln(1/y) - \ln \ln(1/y)$.

1.3.4. $y \approx -(x + \sin x)(1 + \varepsilon \cos x)$.

1.3.5. $y \approx x + \pi^2/4 - \pi\varepsilon + (\pi x^2 + \pi^3 x/4 + 1)\varepsilon^2$.

1.3.6. $y \approx 1 \pm \sqrt{x^2 + 2\varepsilon^2} - (2x^2 + \varepsilon^2)/3$.

1.3.7. (а) $x \approx y + y^3/3$. (б) $x \approx \pi/2 - 4y/\pi^2 - 64y^2/\pi^5$.

1.4.1. (а) $2\sqrt{n} + S - 2 + O(n^{-1/2})$, где $S \approx 0.5396$.

(б) $\ln^2 n/2 + S + O(n^{-1} \ln n)$, где $S \approx -0.0728$.

(в) $2^n \ln n - 2^{n+1}n^{-1} + O(2^n n^{-2})$.

(г) $(2 \ln n)^{-1} + (4n \ln^2 n)^{-1}$.

1.4.2. (а) $\frac{3n^{4/3}}{4} - \frac{n^{1/3}}{2} + O(1)$.

(б) $S - \frac{\ln(n/e)}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$, $S \approx 0.9375$.

(в) $S - \ln(2n)/8n + O(\ln n/n^2)$, где $S \approx 0.07993$.

(г) $2^{2n+1} \ln(2n)/3 + 2^{2n}/9n + O(2^{2n}/n^2)$.

$$1.5.2. \Delta l \approx d \sin \alpha (1 - d^2 \cos^4 \alpha / 8S^2).$$

$$1.5.3. F_{\text{куля}} \approx \pi R S^{-1} \int_{a_0}^{\infty} F(a) da = \pi R \phi_0 / 3a_0^3.$$

$$1.5.5. L = \sqrt{2RH}, H \gg \sqrt[3]{hR^2}.$$

$$1.5.6. d = a \cos \theta, \phi(r < R) \approx \frac{4\pi \rho a}{3} r \cos \theta, \phi(r > R) \approx \frac{4\pi \rho R^3 a \cos \theta}{3 r^2}.$$

$$1.5.7. \sqrt{2}(1 - \varepsilon/2), \sqrt{2}(1 + \varepsilon/6), (1 + \varepsilon/12)/\sqrt{2}.$$

Розділ 2

$$2.1.1. (e^\varepsilon + 2\varepsilon)e^{\frac{\sin \varepsilon t}{\varepsilon}} - 2(\varepsilon + \sin \varepsilon t); e^t + (3e^t - 2 - 2t)\varepsilon + \frac{3-t^3}{6}e^t \varepsilon^2.$$

$$2.1.2. x(t) \approx \pi t - (2\pi \ln t + e^{\pi t})/\mu\pi^2, y(t) \approx e^{\pi t}/\mu\pi.$$

$$2.1.3. \psi(r \rightarrow 0) \approx C_1 r^l, \psi(r \rightarrow \infty) \approx C_2 e^{-r\sqrt{|E|}}.$$

$$2.1.4. y(x) \approx x - 1/(3x^2).$$

$$2.1.5. 2f_2(t) = [f''_{\varepsilon\varepsilon} + 2x_1(t)f''_{x\varepsilon} + x_1^2(t)f''_{xx}](t, x_0(t), 0).$$

$$2.1.6. y(x) \approx y_0(x) + \varepsilon y_1(x), y'_0 + a_0 y'_0 + b_0 y_0 = c(x, 0), y_0(x_0) = u(0), \\ y'_0(x_0) = v(0), y'_1 + a_0 y'_1 + b_0 y_1 = c'_\varepsilon(x, 0) - a'_\varepsilon(x, 0)y'_0 - b'_\varepsilon(x, 0)y_0, \\ y_1(x_0) = u'_\varepsilon(0), y'_1(x_0) = v'_\varepsilon(0), a_0 = a(x, 0), b_0 = b(x, 0).$$

$$2.1.7. \text{(а)} -\ln[1 + (1 - e^{t\varepsilon})/\varepsilon], -\ln(1 - t) + t^2\varepsilon/2(1 - t). \text{(б)} [(\lambda_2 - 1)x^{\lambda_1} + (1 - \lambda_1)x^{\lambda_2} + (\lambda_2 - \lambda_1)x]/(\lambda_2 - \lambda_1)\varepsilon(2 + \varepsilon),$$

$$\lambda_{1,2} = 1/2 - \varepsilon \pm \sqrt{1/4 - \varepsilon}, (1 - x + x \ln x)(1 + 2\varepsilon) - 2\varepsilon x \ln^2 x.$$

$$2.1.8. x(t) \approx 1 + t/\mu, y(t) \approx \pi + \pi(\sin t - t)/\mu.$$

$$2.1.9. \text{(а)} y(x \ll 1) \approx x + x^5/10, y(x \gg 1) \approx e^{x^2/2} - x/2. \text{(б)} y(x \ll 1) \approx L + x(6 - 6L + 3L^2 - L^3), L = \ln(Cx),$$

$$y(x \gg 1) \approx x^{-1/3} + x^{-2/3}/9.$$

$$2.2.1. x(t) = (e^{-t} - e^{-t/\varepsilon})/(1 - \varepsilon), x(t) \approx e^{-t} - e^{-t/\varepsilon}.$$

$$2.2.2. x_0(t) = e^{t/2}\sqrt{t+1} + \varepsilon \left[\frac{e^{t/2}}{\sqrt{t+1}} - \frac{1}{2(t+1)} - \frac{e^{-t/\varepsilon}}{2} \right],$$

$$y_0(t) = \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{t+1}} + e^{-t/\varepsilon} + \varepsilon \left[\frac{e^{-t}(t+3)}{2(t+1)^2} - \frac{e^{-t/2}}{(t+1)^{3/2}} + \frac{e^{-2t/\varepsilon} - e^{-t/\varepsilon}(t/\varepsilon)^2}{2} \right].$$

$$2.2.3. x(t) = -[e^t(t^2 + 1) - 3/2]^{-1}, y(t) = (t+1)^2 x(t) - e^{-t/2\varepsilon}.$$

$$2.2.4. x(t) = \{-2e^{-t} + [3 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 + 2t(1 - \varepsilon)]e^{-t/\varepsilon}\}/(1 - \varepsilon)^2,$$

$$y(t) = \{2(2 - \varepsilon)e^{-t} - [3 - \varepsilon^2 + 2t(1 - \varepsilon)]e^{-t/\varepsilon}\}/(1 - \varepsilon)^2;$$

$$x(t) \approx [(3 + 2t) + (4 + 2t)\varepsilon]e^{-t/\varepsilon} - (2 + 4\varepsilon)e^{-t},$$

$$y(t) \approx -[(3 + 2t) + (6 + 2t)\varepsilon]e^{-t/\varepsilon} + (4 + 6\varepsilon)e^{-t}.$$

$$2.2.5. \psi(x) = C_1 p^{-\frac{1}{2}}(x)e^{\frac{i}{\hbar} \int p(x) dx} + C_2 p^{-\frac{1}{2}}(x)e^{-\frac{i}{\hbar} \int p(x) dx}.$$

$$2.3.1. x(t) \approx a_0 e^{-\varepsilon t/2} \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

$$2.3.2. x(t) \approx a(t) \cos(\omega t + \varphi_0), \omega = \omega_0 + 3\varepsilon a_0^2 / 8\omega_0,$$

$$\text{(а)} a(t) = a_0 + 3\varepsilon a_0^3 [2 \cos(2\omega t + 2\varphi_0) - 1] / 32\omega_0^2; \text{(б)} a(t) = 0.$$

$$2.3.4. \text{(а)} a(t) = a_0 e^{\varepsilon t/2} [1 + a_0^4 (e^{2\varepsilon t} - 1) / 8]^{-1/4}, \varphi = \varphi_0.$$

$$(б) a(t) = \frac{a_0}{\sqrt{b(t)}}, \varphi(t) = \varphi_0 + \frac{\omega \ln b(t)}{2\omega_0}, b(t) = 1 + 3a_0^2 \varepsilon t \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{2}.$$

$$2.3.5. x(t) = \gamma a_0 \exp(-\varepsilon t/a_0^2) \cos(\omega_0 t + \phi_0), \gamma = e^{(\sqrt{2}-1)/2} \sqrt{2(\sqrt{2}-1)}.$$

$$2.3.6. (а) x(t) \approx a(t) \cos(\omega t + \varphi_0) - 2\varepsilon a_0^2/3\omega_0^2, \\ \omega = \omega_0 - 5\varepsilon^2 a_0^2/12\omega_0^3, a(t) = a_0 + \varepsilon a_0^2 \cos(\omega t + \varphi_0)/3\omega_0^2.$$

$$(б) x(t) \approx a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

2.4.1. і 2.4.2. див. рис. 2.1.

$$2.4.3. y|_{x \rightarrow +\infty} \approx 1/x, y|_{x \rightarrow -\infty} \approx x^{-1/3} e^{-x/3}, y|_{x \rightarrow 0} \approx x.$$

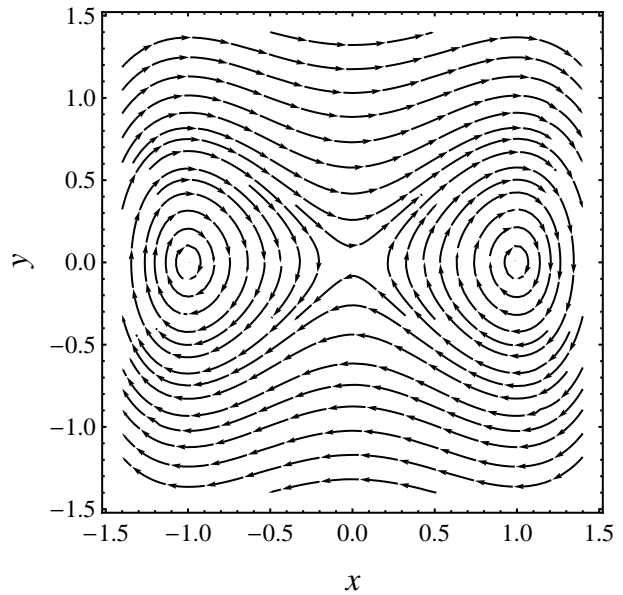
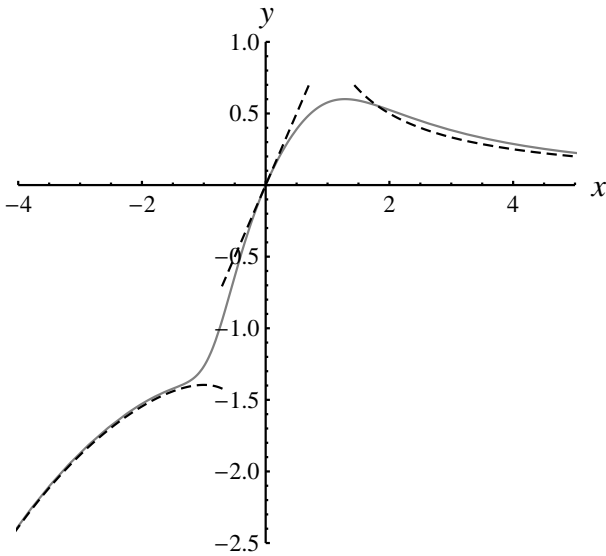


Рис. 3.1: Графіки до завдань 2.4.3 (ліворуч) і 2.4.4 (праворуч)

2.4.4. див. рис. 3.1.

2.4.5. та 2.4.6. див. рис. 3.2.

Розділ 3

$$3.1.1. (а) 1 - \cos 1 + \varepsilon(2 - \cos 1 - 2 \sin 1). (б) \varepsilon^4 \sqrt{\varepsilon}(3 + \varepsilon)/12.$$

$$3.1.2. 10^{10}/(1 + \ln 10) \pm 0.9\%.$$

$$3.1.3. (50\pi)^{-1/2} \pm 0.25\%.$$

$$3.1.4. I''(0) = f_0(b_0)b''(0) - f_0(a_0)a''(0) + \int_{a_0}^{b_0} f''_{\varepsilon\varepsilon}(x, 0)dx + \\ + b'(0)[f'_x(b_0, 0)b'(0) - 2f'_\varepsilon(b_0, 0)] - a'(0)[f'_x(a_0, 0)a'(0) - 2f'_\varepsilon(a_0, 0)].$$

$$3.1.5. (а) (6 - 2e)\varepsilon - e\varepsilon^2. (б) 1 - \varepsilon/3. (в) \varepsilon + \varepsilon^2(2 \ln \varepsilon - 1)/4.$$

$$3.1.6. (а) 4^{1-n}/n. (б) \sqrt{\pi/600} \pm 0.5\%.$$

$$3.2.1. \operatorname{Erf}(x) \approx e^{-x^2}(2x^{-1} - x^{-3})/4; \operatorname{Erf}(2) = 7e^{-4}/32 \pm 5\%.$$

$$3.2.2. S(x \gg 1) \approx x^{-1} - x^{-2}; S(x \ll 1) \approx -\ln x - x(\ln x - 1).$$

$$3.2.5. F_1(x) \approx -\frac{\sin x^2}{2x} + \frac{\cos x^2}{4x^3}; F_2(x) \approx \frac{\cos x^2}{2x} + \frac{\sin x^2}{4x^3}.$$

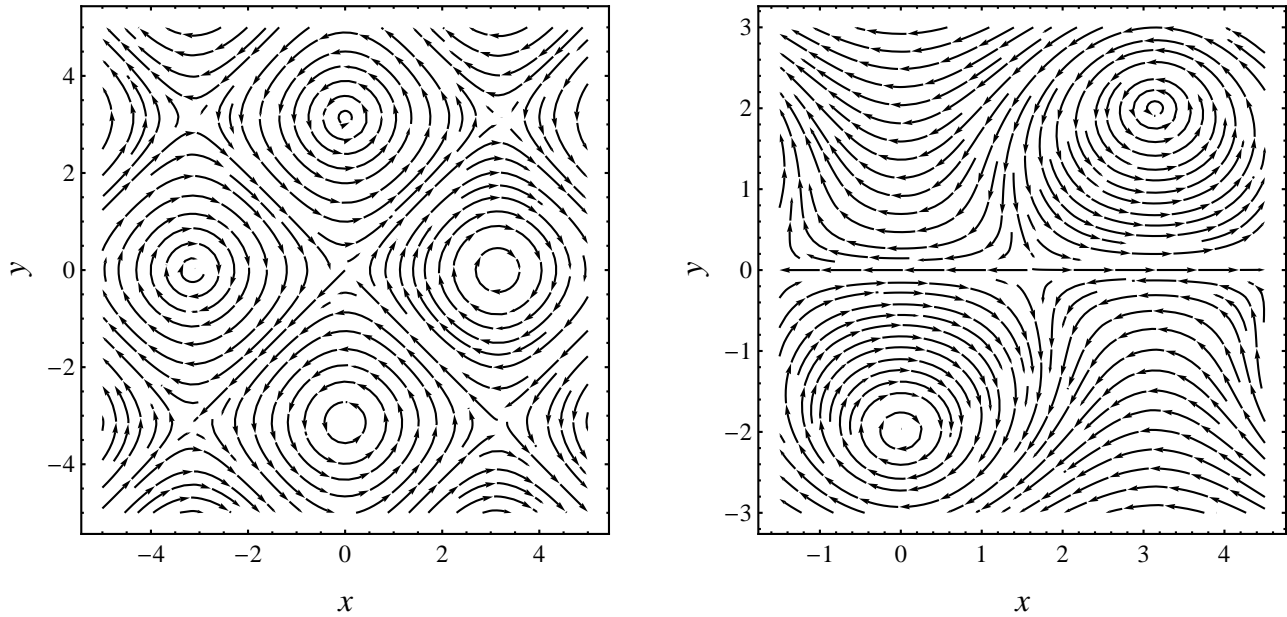


Рис. 3.2: Графіки до завдань **2.4.5** (ліворуч) і **2.4.6** (праворуч)

3.2.6. $\Gamma(a, x) \approx e^{-x} [x^{a-1} + (a-1)x^{a-2} + (a-1)(a-2)x^{a-3}]$;
 $\Gamma(1/5, 5) = 0.0017 \pm 5\%$.

3.2.7а. $\frac{8\pi}{nk} e^{-k \sin \frac{\pi}{2n}} \cos \left[\frac{\pi}{4} (n^{-1} - 1) + k \cos \frac{\pi}{2n} \right]$.

3.2.7б. $(-1)^n (2n-1)! k^{-2n}$.

3.3.1. $e^{-ik} \sqrt{\frac{i\pi}{4k}}$.

3.3.2. $\left(\frac{2^{1/3} \pi}{300} \right)^{1/2} \cos \left(\frac{75}{2^{2/3}} + \frac{\pi}{4} \right) \pm 8\%$.

3.3.3.

3.3.4. (а) $\left[\sqrt{2} \cos \left(\frac{k}{27} + \frac{\pi}{4} \right) - 1 \right] \sqrt{\frac{\pi}{8k}}$. (б) $\sqrt{\frac{\pi}{k}} \cos \left(1 + \frac{\pi}{4} \right)$.

(в) $2(3k)^{-1/3} \Gamma(4/3) e^{i(2k+3\pi)/18}$.

3.3.5. $(2/e)^{100i} \sqrt{\pi i/50}$.

3.4.1. $e^p / \sqrt{2\pi p} + O(p^{-1} e^p)$.

3.4.3. $e^{2pz_0^3} \sqrt{\pi / (3pz_0)}$, $z_0 = (2/9)^{1/4} e^{i\pi/8}$.

3.4.4. $\pi^{p+2} p^{-2}$.

3.4.6. $e^{7p/4} \sqrt{\frac{\pi}{2p\sqrt{13}}} \sin [2p + \varphi]$, $\operatorname{tg} 2\varphi = 3/2$.

Бібліографія

- [1] Асимптотические методы в анализе / Н. Г. Де Брёйн. — М. : Изд-во иностранной литературы, 1961. — 248 с.
- [2] Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных уравнений / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. — М. : Наука, 1973. — 272 с.
- [3] Методы возмущений / А. Найфэ. — М. : Мир, 1976. — 446 с.
- [4] Асимптотические разложения / Э. Копсон. — М. : Мир, 1966. — 160 с.
- [5] Асимптотические оценки и целые функции / М. А. Евграфов. — 3-е изд. — М. : Наука, 1979. — 320 с.
- [6] Асимптотические разложения / А. Эрдейи. — М. : Физматгиз, 1962. — 128 с.
- [7] Методы асимптотической оценки интегралов / З. С. Агранович. — Х. : ХГУ, 1970. — 50 с.

Навчальне видання

Апостолов Станіслав Сергійович

Рохманова Тетяна Миколаївна

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

У ТЕОРЕТИЧНІЙ ФІЗИЦІ

Навчально-методичний посібник

Коректор *О. В. Анцибора*

Комп'ютерне верстання *С. С. Апостолов*

Макет обкладинки *І. М. Дончик*

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 4,03. Наклад 100 пр. Зам. № 147/21.

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09.

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна

Тел. 705-24-32

Надруковано з готових оригінал-макетів у ФО-П Тітов Є.В.
61057, м. Харків, Харківська набережна, 9, кв. 23.

Свідоцтво про реєстрацію ВОО № 951823 від 18.01.1999 р.